УДК 517.951+517.956

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. И. Комеч

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный обзор посвящен методам решения и исследования уравнений вида

$$Pu(x) \equiv P(\partial_x)\, u(x) \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant m} p_\alpha \partial_x^\alpha u(x) = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n. \qquad (0.1)$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндексы, $\alpha_k = 0, 1, 2, \ldots$ при $k = 1, \ldots, n$; $p_\alpha \in \mathbf{C}$, и

$$\partial_x^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

Основные методы исследования таких уравнений — преобразование Фурье и теория обобщенных функций.

Уравнения вида (0.1) используются в математической физике для описания различных явлений в теории упругости, акустике, электродинамике, квантовой механике. Исследованием свойств решений этих уравнений и нахождением формул для их решений занимались еще в XVIII—XIX вв. Эйлер, Даламбер, Лаплас, Фурье, Бессель, Пуассон, Кирхгоф, Хевисайд, Грин. С начала XX века вплоть до 40-х годов существенные результаты в этой области были получены в работах Адамара, Рисса, Герглотца, И. Г. Петровского, Гординга, Лере. В последующие десятилетия в работах Шварца, И. М. Гельфанда, Г. Е. Шилова, Мальгранжа, Эренпрайса, Хёрмандера и других была создана достаточно общая теория таких уравнений. Это оказалось возможным на основе теории обобщенных функций, возникновение и развитие которой было тесно связано с изучением уравнений математической физики.

Основной метод исследования уравнений (0.1) — разложение $f(x)$ и $u(x)$ в интегралы Фурье, т. е. разложение по гармоникам вида

$$u(x)=\int e^{-ix\xi}\tilde{u}(\xi)\,d\xi, \quad f(x)=\int e^{-ix\xi}\tilde{f}(\xi)\,d\xi; \tag{0.2}$$
$$x\xi=x_1\xi_1+\ldots+x_n\xi_n \quad \text{для} \quad x, \ \xi\in\mathbf{R}^n.$$

Дело в том, что экспоненты $e^{-ix\xi}$ являются собственными функциями оператора P вида (0.1):

$$Pe^{-ix\xi}=\tilde{P}(\xi)\,e^{-ix\xi},$$

где

$$\tilde{P}(\xi)=\sum_{|\alpha|\leqslant m} p_\alpha(-i\xi)^\alpha=P(-i\xi); \tag{0.3}$$

$\tilde{P}(\xi)$ — символ оператора P — это собственное число, соответствующее собственной функции $e^{-ix\xi}$. Следовательно, представление Фурье (0.2) есть разложение по собственным функциям оператора P и, стало быть, приводит оператор P к диагональному виду, после чего уравнение (0.1) легко решается. Например, если $f(x)=\tilde{f}(\xi)e^{-ix\xi}$, т. е. $f(x)$ содержит только одну гармонику, то $u(x)$ также можно искать в виде $\tilde{u}(\xi)e^{-ix\xi}$. Подставляя функцию $u(x)$ такого вида в (0.1), мы получаем ввиду (0.3):

$$\tilde{P}(\xi)\,\tilde{u}(\xi)=\tilde{f}(\xi). \tag{0.4}$$

Отсюда $\tilde{u}(\xi)=\tilde{f}(\xi)/\tilde{P}(\xi)$, если $\tilde{P}(\xi)\neq 0$. Если же $\tilde{P}(\xi)=0$, то $\tilde{u}(\xi)$ — произвольное число при $\tilde{f}(\xi)=0$ и $\tilde{u}(\xi)$ не существует при $\tilde{f}(\xi)\neq 0$. Подобный анализ оказывается возможным и в общем случае произвольной функции $f(x)$ с использованием разложений (0.2). При этом также получается тождество (0.4), которое выполняется для всех ξ, откуда формально

$$\tilde{u}(\xi)=\frac{\tilde{f}(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \quad \text{при всех } \xi. \tag{0.5}$$

Подставляя в (0.2), находим формально

$$u(x)=\int e^{-ix\xi}\frac{\tilde{f}(\xi)}{\tilde{P}(\xi)}\,d\xi. \tag{0.6}$$

Главная трудность в реализации этой программы состоит в том, чтобы придать смысл формальным выкладкам (0.2), (0.4) — (0.6) и обосновать возможность деления в (0.5). Эти проблемы возникают из-за того, что оператор P, определенный на функциях во всем пространстве $\mathbf{R}^n$, имеет непрерывный спектр, и его собственные функции $e^{-ix\xi}$ не принадлежат пространству $L_2(\mathbf{R}^n)$, т. е. являются «обобщенными» собственными функциями в смысле Гельфанда — Костюченко — Левитана [20]. Соответственно, и «коэффициенты» $\tilde{u}(\xi)$, $\tilde{f}(\xi)$ разложений (0.2) оказываются обобщенными функциями. В связи с этим, теория обобщенных функций является основным инструментом исследования уравнений вида (0.1) и поэтому мы начинаем данный обзор с ее конспективного изложения в главе 1.

В главе 1 напоминаются основные правила действий с обобщенными функциями. Строятся решения уравнения (0.1) с произвольной правой частью $f(x)$ в виде свертки f с фундаментальным решением уравнения (0.1).

В главе 2 вводится преобразование Фурье обобщенных функций при помощи замыкания по непрерывности. Излагается теория Пэли—Винера преобразования Фурье в комплексной области и связь свертки с преобразованием Фурье. Эта теория находит важные применения, например, при обосновании дисперсионных соотношений в квантовой теории поля [6] и при построении операционного исчисления (см. § 3 гл. 3).

Глава 3 посвящена существованию и гладкости решений уравнения (0.1). Излагается схема решения проблемы деления (0.5), теория разрешимости уравнений вида (0.1) в конусе, операционное исчисление, вводятся основные понятия теории уравнений в частных производных: понятия характеристики, бихарактеристики, волнового фронта. Подробно разъясняется смысл этих понятий. Излагаются результаты о распространении особенностей для вещественных уравнений главного типа, классическая «лемма Вейля» о гладкости обобщенных решений эллиптических уравнений.

В главе 4 при помощи единого метода, обобщающего метод комплексных степеней Рисса [63] вычисляются в явном виде фундаментальные решения всех вещественных уравнений второго порядка с невырожденной квадратичной формой. Для однородных операторов вида $P=\sum\limits_{i=1}^{n}\pm\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ при $n\neq 2$ фундаментальные решения получаются в виде аналитического продолжения функции $C\rho^\lambda$ $\left(\text{где } \rho=\left(\sum\limits_i \pm x_i^2\right)^{1/2}\right)$ по λ в точку $\lambda=-(n-2)$, а для неоднородных операторов вида $P=\sum\limits_{i=1}^{n}\pm\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+q$, где $q\neq 0$ (в частности, для оператора Клейна—Гордона)—в виде аналитического продолжения бесселевой функции $C\rho^\nu J_\nu(\rho)$ в точку $\nu=-\frac{n-2}{2}$ (при $n\neq 2$). Эти фундаментальные решения на языке несобственных интегралов («виселиц Адамара») построены им еще в монографии [51]. Однако на современном языке теории распределений эти фундаментальные решения были впервые вычислены в случае $q=0$ в [56] и [63], а для $q\neq 0$ — в данной статье. Эти фундаментальные решения играют важную роль в задачах современной математической физики (см. [6]). Поэтому мы уделяем большое внимание методам их вычисления и технике работы с ними.

В главе 5 излагается теория краевых задач в полупространстве. Указаны достаточные условия на краевую задачу, близкие к необходимым, при которых она имеет единственное решение для любых граничных данных, и необходимые условия на дифференциальный оператор, при которых для него могут существовать такие краевые задачи. При этом естественно возникает классическое разделение уравнений на уравнения гиперболического, параболического и эллиптического типов, играющее фундаментальную роль в современной теории уравнений в частных производных, хотя это разделение и не является всеобъемлющим. Указаны «правильные» постановки краевых задач для уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типов.

Глава 6, написанная В. А. Васильевым, посвящена обзору теории лакун для гиперболических уравнений, развитой в работах И. Г. Петровского, Атьи, Ботта и Гординга.

Через $x_k \xrightarrow{X} x$ мы обозначаем последовательность элементов линейного топологического пространства X, сходящуюся к $x \in X$; под непрерывными отображениями таких пространств мы для простоты подразумеваем секвенциально непрерывные отображения, хотя и не всегда это оговариваем.

Глава 1

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Обобщенные функции и действия над ними

1.1. Дифференцирование обобщенных функций. Через $\mathcal{D}=\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)=C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ обозначается *пространство пробных* или *основных комплекснозначных функций* $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, равных нулю при $|x|>R$, где R может зависеть от φ. Сходимость в $\mathcal{D}$ определяется так: по определению, последовательность $\varphi_k \to \varphi$ в $\mathcal{D}$, если

1) Производные $\varphi_k^{(\alpha)}$ любого порядка $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ равномерно на $\mathbf{R}^n$ сходятся к $\varphi^{(\alpha)}(x)$: $\forall\alpha$

$$\varphi_k^{(\alpha)}(x) \rightrightarrows \varphi^{(\alpha)}(x), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

2) Для некоторого R, не зависящего от k,

$$\varphi_k(x)=0 \text{ при } |x|>R.$$

Через $\mathscr{D}' \equiv \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ обозначается множество всех линейных функционалов на $\mathscr{D}$, непрерывных относительно введенной сходимости в $\mathscr{D}$. В $\mathscr{D}'$ вводится *слабая сходимость*: по определению, последовательность $u_k(x) \in \mathscr{D}'$ слабо сходится к $u(x) \in \mathscr{D}'$ при $k \to \infty$ $(u_k \xrightarrow{\mathscr{D}'} u)$, если

$$\langle u_k, \varphi \rangle \underset{k\to\infty}{\to} \langle u, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}. \tag{1.1}$$

Пример 1.1. Если $u(x) \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$, то функционал от $\varphi \in \mathscr{D}$ вида

$$u: \varphi \mapsto u(\varphi) = \langle u(x), \varphi(x) \rangle \equiv \int_{\mathbf{R}^n} u(x)\varphi(x)\,dx \tag{1.2}$$

является элементом из $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$.

Определение 1.1. Функционалы $u \in \mathscr{D}'$ называются *обобщенными функциями* или *распределениями*.

Определим для $u \in \mathscr{D}'$ по аналогии с (1.2) «скалярное произведение»

$$\langle u(x), \varphi(x) \rangle \equiv u(\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}. \tag{1.3}$$

Отметим, что здесь $u(x)$ — это просто символ, не обозначающий значения какой-либо функции u в точках x. Грубо говоря, для обобщенной функции u «наблюдаемыми» величинами являются значения $u(\varphi)$ при $\varphi \in \mathscr{D}$, а не $u(x)$ при $x \in \mathbf{R}^n$. Часто обобщенные функции будем называть просто функциями.

Пример 1.2. Знаменитая обобщенная *δ-функция Дирака* [44] определяется тождеством

$$\langle \delta(x), \varphi(x) \rangle = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n). \tag{1.4}$$

Иногда такая функция $\delta(x)$ обозначается через $\delta_n(x)$.

Пример 1.1 показывает, что пространство «классических» функций $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ естественно отображается в $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$. Оказывается, разным функциям $u(x) \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ соответствуют (по формуле (1.2)) разные функционалы $u \in \mathscr{D}'$. Поэтому отображение $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, определяемое (1.2), является *вложением*, т. е. $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ можно отождествить с подмножеством в $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ и считать, что

$$L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n) \subset \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n).$$

С другой стороны, оказывается [18], [37], что $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ не совпадает с $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, поскольку $\delta \in \mathscr{D}'$, но $\delta \notin L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$. Таким образом, $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ — более широкое пространство, чем $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$.

Замечательно, что такое расширение пространства $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ является замкнутым относительно операции дифференцирования:

Определение 1.2. Для любой обобщенной функции $u(x)$ и любого мультииндекса $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ *производная* $\partial_x^\alpha u(x)=u^{(\alpha)}(x)$ определяется тождеством

$$\langle u^{(\alpha)}(x), \varphi(x)\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle u(x), \varphi^{(\alpha)}(x)\rangle, \quad \varphi\in\mathscr{D}. \qquad (1.5)$$

Оказывается [18], [37], $u^{(\alpha)}(x)\in\mathscr{D}'$ при всех $u\in\mathscr{D}'$ и всех мультииндексах $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, и оператор $\partial^\alpha: u\mapsto u^{(\alpha)}$ (секвенциально) непрерывен в $\mathscr{D}'$ относительно слабой сходимости (1.1). Для $u\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ производные $\partial_x^\alpha u(x)$ совпадают с обычными производными в смысле классического анализа. Ввиду плотности $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ в $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, такое непрерывное продолжение оператора ∂_x^α на $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ единственно.

Пример 1.3. Пусть $\theta(x)$ — *функция Хевисайда* («ступенька»):

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x<0.\end{cases} \qquad (1.6)$$

Тогда $\langle\theta'(x), \varphi(x)\rangle=-\langle\theta, \varphi'\rangle=-\int\limits_0^\infty\varphi'(x)\,dx=\varphi(0)$, т. е.

$$\theta'(x)=\delta(x). \qquad (1.7)$$

Пример 1.4. Производные от $\delta(x)$: для $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$

$$\langle\delta'(x), \varphi(x)\rangle=-\varphi'(0);\ \langle\delta''(x), \varphi(x)\rangle=\varphi''(0). \qquad (1.8)$$

Чрезвычайно важную роль в приложениях играет следующая простая

Формула дифференцирования кусочно-гладких функций.

Пусть $u(x)\in C^1(\mathbf{R}\setminus\{a\})$, где $a\in\mathbf{R}$; обозначим

$$\{u'(x)\}=u'(x),\ x\neq a \qquad (1.9)$$

— функцию, равную обычной производной от $u(x)$ в тех точках $x\in\mathbf{R}$, где она существует. Предположим, что существуют пределы $u(a\pm0)$ и (хотя это и не обязательно) существуют пределы $u'(a\pm0)$.

Лемма 1.1. В смысле дифференцирования обобщенных функций

$$u'(x)=\{u'(x)\}+h\delta(x-a), \qquad (1.10)$$

где

$$h=u(a+0)-u(a-0)$$

— скачок функции $u(x)$ в точке $x=a$.

Доказательство. Для $\varphi(x)\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$

$$\langle u', \varphi\rangle=-\langle u, \varphi'\rangle=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}u\varphi'dx=-\int\limits_{-\infty}^{a}u\varphi'dx-\int\limits_{a}^{\infty}u\varphi'dx=$$

$$=-u\varphi\Big|_{-\infty}^{a}-u\varphi\Big|_{a}^{\infty}+\int\limits_{x\neq a}u'\varphi dx=h\varphi(a)+\langle\{u'\}, \varphi\rangle.$$

Пример 1.5. Из (1.10) легко вывести, что $\theta'(x)=\delta(x)$ — это соответствует (1.7); $|x|''=2\delta(x)$;

$$\left(\frac{d}{dx}+\lambda\right)(\theta(x)e^{-\lambda x})=\delta(x);\quad \left(-\frac{d^2}{dx^2}+m_0^2\right)\frac{e^{-m_0|x|}}{2m_0}=\delta(x),\quad m_0\neq 0;$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\omega^2\right)\frac{\sin\omega|x|}{2\omega}=\delta(x),\quad \omega\neq 0. \tag{1.11}$$

1.2. Замена переменных в обобщенных функциях. Пусть $m\geqslant n$ и $h:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n$ — гладкое отображение ранга n в каждой точке $y\in\mathbf{R}^m$. Тогда прообраз каждой точки $x\in\mathbf{R}^n$ есть гладкое подмногообразие $\Gamma_x=h^{-1}(x)$ в $\mathbf{R}^m$ размерности $\nu=m-n$. На Γ_x имеется гладкая мера $\omega_x(dy)$, которая обладает таким свойством: для любой функции $f(y)\in C(\mathbf{R}^m)$, равной нулю вне какого-то (своего) ограниченного множества в $\mathbf{R}^m$,

$$\int f(y)\,d^m y=\int\left(\int\limits_{\Gamma_x} f(y)\,\omega_x(dy)\right)d^n x, \tag{1.12}$$

где $d^n x$ и $d^m y$ — формы элемента объема на $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ соответственно. Такая мера легко строится [55]. Можно показать, что

$$\omega_x(dy)=\frac{\sigma_\nu(dy)}{G(y)}, \tag{1.13}$$

где $\sigma_\nu(dy)$ — евклидова ν-мерная мера на Γ_x, а $G(y)$ — n-мерный объем параллелепипеда, натянутого на векторы $\operatorname{grad} h_1(y),\ldots$ $\ldots,\operatorname{grad} h_n(y)$ $(h(y)=(h_1(y),\ldots,h_n(y)))$:

$$G(y)=\left(\sum_{1\leqslant k_1<\ldots<k_n\leqslant m}\left|\frac{\partial(h_1,\ldots,h_n)}{\partial(y_{k_1},\ldots,y_{k_n})}\right|^2\right)^{1/2}. \tag{1.14}$$

Поскольку h имеет ранг n в каждой точке $y\in\mathbf{R}^m$, то $G(y)\neq 0$.

Пример 1.6. Если $m=n$, то $h:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ — диффеоморфизм, $\Gamma_x=h^{-1}(x)$ — одна точка, $\sigma_0(\Gamma_x)=1$, а

$$G(y)=\left|\frac{\partial(h_1,\ldots,h_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)}\right| \tag{1.15}$$

— якобиан h в точке y.

Пример 1.7. Если $n=1$, то $h=h_1(y)$, и $\operatorname{grad} h(y)\neq 0$ при $y\in\mathbf{R}^m$. Тогда

$$G(y)=|\operatorname{grad} h(y)|. \tag{1.16}$$

Пример 1.8. Если $m=3$ и $n=2$, то $G(y)=|[\operatorname{grad} h_1(y),\operatorname{grad} h_2(y)]|$ — модуль «векторного» произведения.

Предложение 1.1. Пусть $\operatorname{rank}\dfrac{\partial h(y)}{\partial y}=n$ при $\forall y\in\mathbf{R}^m$. Тогда отображение $u(x)\mapsto u(h(y))$ непрерывно действует из $C(\mathbf{R}^n)$ в $C(\mathbf{R}^m)$ и продолжается до (секвенциально) непрерывного оператора из $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^m)$ относительно сходимости (1.1).

Доказательство. Возьмем $u(x)\in C(\mathbf{R}^n)$; тогда из (1.12) получаем, что для $\varphi(y)\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$

$$\langle u(h(y)), \varphi(y)\rangle = \int u(x)\left(\int_{\Gamma_x} \varphi(y)\,\omega_x(dy)\right) d^n x =$$

$$= \langle u(x), \bar{\varphi}(x)\rangle. \tag{1.17}$$

Здесь

$$\bar{\varphi}(x) = \int_{\Gamma_x} \varphi(y)\,\omega_x(dy). \tag{1.18}$$

Легко показать, что

$$\bar{\varphi}(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n). \tag{1.19}$$

Например, можно разбить $\varphi(y)$ в сумму функций с достаточно малыми носителями и в каждом носителе выбрать координаты $y_1, \ldots, y_m$ так, чтобы $y_k(x) = h_k(x)$ при $k = 1, \ldots, n$. Поэтому отображение $u(x) \to u(h(y))$ непрерывно на $C(\mathbf{R}^n)$ относительности сходимости (1.1) и допускает замыкание по (секвенциальной) непрерывности на $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$.

Из (1.17) замыканием по непрерывности получаем

Определение 1.4. Для $u(x) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$

$$\langle u(h(y)), \varphi(y)\rangle = \langle u(x), \bar{\varphi}(x)\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^m). \tag{1.20}$$

Пример 1.9. Если $h: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — диффеоморфизм, как в примере 1.6, то $\bar{\varphi}(x) = \varphi(h^{-1}(x))/G(h^{-1}(x))$, и

$$\langle u(h(y)), \varphi(y)\rangle = \left\langle u(x), \frac{\varphi(h^{-1}(x))}{G(h^{-1}(x))}\right\rangle. \tag{1.21}$$

Замечание 1.1. Условие, что $h(y)$ имеет ранг n в каждой точке $y \in \mathbf{R}^m$, не является необходимым для того, чтобы суперпозиция $u(h(y))$ имела смысл. Условие $\bar{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ из (1.19) может выполняться для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$ при некоторых $h(y)$, не всюду имеющих ранг n. Кроме того, условие $\bar{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ также не является обязательным. Грубо говоря, функция $\bar{\varphi}(x)$ должна быть гладкой лишь в тех точках x_0, где $u(x)$ имеет особенности, и отображение $h(y)$ должно иметь ранг n лишь в точках $y_0 = h^{-1}(x_0)$.

Пример 1.10. Если $h(y) \in C^\infty(\mathbf{R}^m)$ и $\operatorname{grad} h(y) \neq 0$ при $y \in \mathbf{R}^m$, то, по определению (1.17) и ввиду (1.16), для $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$

$$\langle \delta_1(h(y)), \varphi(y)\rangle = \langle \delta_1(x), \bar{\varphi}(x)\rangle = \bar{\varphi}(0) = \int_{\Gamma_0} \frac{\varphi(y)\,\sigma_{m-1}(dy)}{|\operatorname{grad} h(y)|}, \tag{1.22}$$

где $\Gamma_0 = h^{-1}(0) = \{y \in \mathbf{R}^m : h(y) = 0\}$.

Например, для $h(y) = |y|^2 - \omega^2$, $\omega \in \mathbf{R} \setminus 0$,

$$\langle \delta_1(|y|^2 - \omega^2), \varphi(y)\rangle = \int_{|y|=|\omega|} \frac{\varphi(y)\,\sigma_{m-1}(dy)}{2|\omega|}. \tag{1.23}$$

Заметим, что правая часть формулы (1.22) имеет смысл для любых $\varphi \in C(\Gamma_0)$, если выполняется $\operatorname{grad} h(y) \neq 0$ при $y \neq 0$, $m \geqslant 2$, и

$$\int\limits_{\Gamma_0^R \setminus 0} \frac{\sigma_{m-1}(dy)}{|\operatorname{grad} h(y)|} < \infty \quad \forall R > 0; \quad \Gamma_0^R = \{y \in \Gamma_0 : |y| \leqslant R\}, \tag{1.24}$$

Определение 1.4. При условии (1.24) определим $\delta_1(h(y))$ по формуле (1.22) считая, что $\sigma_{m-1}(\{0\}) = 0$, если $0 \in \Gamma_0$.

Пример 1.11. Если $h(y) = y_1^2 + \ldots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \ldots - y_m^2$ — невырожденная квадратичная форма, то $\operatorname{grad} h(y) = 0$ при $y = 0 \in \in \Gamma_0$. Однако условие (1.24) выполняется при $m \geqslant 3$.

Отметим, что из определения (1.22) вытекает формула

$$\delta(a(y) h(y)) = \frac{1}{a(y)} \delta(h(y)), \tag{1.25}$$

если $a(y) \in C^\infty(\mathbf{R}^m)$ и $a(y) \neq 0$ при $y \in \mathbf{R}^m$.

Замечание 1.2. Условие (1.24) дает возможность определить $\delta_1(h(y))$, но не пригодно для определения $u(h(y))$ с произвольной функцией $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Для каждой конкретной функции $u \in \mathcal{D}'$ можно найти свои условия типа (1.24) на $h(y)$, при которых $u(h(y))$ имеет смысл и в каком-либо смысле непрерывно зависит от отображения h из рассматриваемого класса. Например, обобщенная функция $\delta_1(h(y))$, определяемая формулой (1.22), непрерывно зависит от $h(\cdot) \in C^1(\mathbf{R}^m)$ в классе функций $h(y)$, для которых $\operatorname{grad} h(y) \neq 0$ при $y \in \Gamma_0$.

Отметим, что выражение (1.22) совпадает с результатом «обычного» формального интегрирования с δ-функцией как интегрирования по мере $\delta(h)\, dh = \delta_{(0)}(dh)$, сосредоточенной в точке $h = 0$. А именно, выберем в окрестности поверхности Γ_0 координаты $(h(y), y')$, где y' — локальные координаты на Γ_0. Это возможно, если $\operatorname{grad} h(y) \neq 0$ при $y \in \Gamma_0$, и $h(y) \in C^1(\Gamma_0)$. Тогда $d^m y = = \dfrac{dh\, \sigma_{m-1}(dy')}{|\operatorname{grad} h(y)|}$, и поэтому формально

$$\int \delta(h(y)) \varphi(y)\, dy = \int\limits_{\Gamma_0} \left(\int\limits_{\mathbf{R}} \delta(h) \varphi(h, y')\, dh \right) \frac{\sigma_{m-1}(dy')}{|\operatorname{grad} h(y)|} = \\ = \int\limits_{\Gamma_0} \frac{\varphi(0, y')\, \sigma_{m-1}(dy')}{|\operatorname{grad} h(y)|}. \tag{1.26}$$

Пример 1.12. Пусть отображение $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ — проекция: $h(y_1, y_2) = y_1$. Тогда для $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$

$$\langle \delta_1(y_1), \varphi(y) \rangle = \langle \delta_1(x), \bar{\varphi}(x) \rangle = \bar{\varphi}(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(0, y_2)\, dy_2. \tag{1.27}$$

Аналогично,

$$\langle \delta_1(y_2), \varphi(y) \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(y_1, 0)\, dy_1. \tag{1.28}$$

Пример 1.13. Пусть $m=n$, и $x=h(y)=y-z$ — сдвиг на вектор $z\in\mathbf{R}^n$. Тогда, согласно (1.21),

$$\langle u(y-z), \varphi(y)\rangle = \langle u(x), \varphi(x+z)\rangle. \tag{1.29}$$

В частности,

$$\langle \delta(y-z), \varphi(y)\rangle = \varphi(z), \quad \varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n). \tag{1.30}$$

Замечание 1.3. Из (1.30) видно, что $\delta(y-z)$ формально есть интегральное ядро единичного оператора в $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$. Именно поэтому Дирак в 1927 г. обозначил такую «функцию» буквой δ, по аналогии с δ-символом Кронекера δ_{ij}, который является матрицей единичного оператора в $\mathbf{R}^N$: $\sum\limits_j \delta_{ij}\varphi_j=\varphi_i$ для $\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_N)\in\mathbf{R}^N$, аналогично (1.30) (см. [44]).

Пример 1.14. Если $x=h(y)=ay$, где $a\in\mathbf{R}\setminus 0$, то для $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^N)$

$$\langle u(ay), \varphi(y)\rangle = \frac{1}{|a|^n}\left\langle u(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right\rangle. \tag{1.31}$$

В частности,

$$\langle \delta_n(ay), \varphi(y)\rangle = \frac{1}{|a|^n}\varphi(0) \Rightarrow \delta_n(ay)=\frac{1}{|a|^n}\delta_n(y). \tag{1.32}$$

Таким образом, $\delta_n(y)$ — положительно однородная обобщенная функция порядка — n и $\delta_n(y)$ — четная функция.

Пример 1.15. Если $x=h(y)=Cy$, где $C\in GL_{\mathbf{R}}(n)$ — невырожденная вещественная матрица, то обозначим $u_C(y)=u(Cy)$:

$$\langle u_C(y), \varphi(y)\rangle = \langle u(Cy), \varphi(y)\rangle = \frac{1}{|\det C|}\langle u(x), \varphi(C^{-1}x)\rangle. \tag{1.33}$$

В частности, если $|\det C|=1$, то

$$\langle \delta_n(Cy), \varphi(y)\rangle = \varphi(0) \Rightarrow \delta_n(Cy)=\delta_n(y). \tag{1.34}$$

Следовательно, например, $\delta_n(y)$ инварианта относительно вращений $C\in O(n)$ и относительно *преобразований Лоренца* (сохраняющих квадратичную форму $y_1^2-y_2^2-\ldots-y_n^2$).

1.3. Носитель обобщенной функции. Для функции $\varphi(x)\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ ее *носителем* называется замыкание множества тех $x\in\mathbf{R}^n$, где $\varphi(x)\neq 0$:

$$\operatorname{supp}\varphi=\overline{\{x\in\mathbf{R}^n : \varphi(x)\neq 0\}}. \tag{1.35}$$

Очевидно, $\operatorname{supp}\varphi$ — компакт. Для открытой области $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ обозначим $\mathscr{D}(\Omega)=C_0^\infty(\Omega)=\{\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n) : \operatorname{supp}\varphi\subset\Omega\}$. По определению, $\varphi_k\xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)}\varphi$, если $\varphi_k\xrightarrow{\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)}\varphi$ и $\operatorname{supp}\varphi_k\subset K$, где K — компакт в Ω, не зависящий от k. Вложение $\mathscr{D}(\Omega)\subset\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ непрерывно, а двойственное отображение $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)\to\mathscr{D}'(\Omega)$ по определению есть операция ограничения обобщенных функций $u(x)$ на открытое множество $\Omega : u\mapsto u|_\Omega$. Подробнее,

$$\langle u|_\Omega, \varphi \rangle_\Omega = \langle u, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \tag{1.36}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$ — двойственность между $\mathscr{D}'(\Omega)$ и $\mathscr{D}(\Omega)$.

Определение 1.5. Для u, $v \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ скажем, что $u(x) = v(x)$ при $x \in \Omega$, если $u|_\Omega = v|_\Omega$, т. е.

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle v, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{1.37}$$

Предложение 1.2. ([18], [37[, [65]). Если $\{\Omega_i\}$ — любое семейство открытых множеств $\Omega_i \subset \mathbf{R}^n$ и $u|_{\Omega_i} = 0 \; \forall i$, то $u|_\Omega = 0$, где $\Omega = \bigcup_i \Omega_i$.

Следовательно, существует максимальная область $\Omega(u) \subset \subset \mathbf{R}^n$, на которой $u(x) = 0$. А именно,

$$\Omega(u) = \bigcup_{\Omega: u|_\Omega = 0} \Omega.$$

Определение 1.6. Для $u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ *носителем* называется множество

$$\operatorname{supp} u = \mathbf{R}^n \setminus \Omega(u). \tag{1.38}$$

Если $\operatorname{supp} u \subset K$, где K — множество в $\mathbf{R}^n$, то говорят, что u *сосредоточена* на K. Обозначим $\mathscr{D}'_K = \{u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n) : \operatorname{supp} u \subset K\}$. Если K замкнуто в $\mathbf{R}^n$, то $\mathscr{D}'_K$ — замкнутое подпространство в $\mathscr{D}'$ и сходимость в $\mathscr{D}'_K$ по определению совпадает со сходимостью в $\mathscr{D}'$.

Пример 1.16. $\operatorname{supp} \theta(x) = \overline{\mathbf{R}}_+$, где $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$,

$$\operatorname{supp} \delta(x-a) = \operatorname{supp} \delta^{(\alpha)}(x-a) = \{a\}, \; a \in \mathbf{R}^n. \tag{1.39}$$

Очевидно, $\operatorname{supp} u$ — замкнутое множество. Для $u \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ носители (1.35) и (1.38) совпадают.

Определение 1.7. Через $\mathscr{E}' = \mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$ обозначается пространство распределений $u(x) \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, имеющих компактный носитель (см. [18], [37]). По определению, $u_k \xrightarrow{\mathscr{E}'} u$, если $u_k \xrightarrow{\mathscr{D}'} u$ и $\operatorname{supp} u_k \subset K$, где K — компакт в $\mathbf{R}^n$, не зависящий от k. Распределения $u(x) \in \mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$ называются *финитными*.

Для $u(x) \in \mathscr{E}'$ скалярное произведение (1.3) можно определить при всех $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ и даже при $\varphi(x) \in C^\infty(\Omega)$, гладких в какой-либо окрестности Ω множества $\operatorname{supp} u$. А именно, нужно взять «срезающую» функцию $\psi(x) \in \mathscr{D}(\Omega)$, равную 1 в некоторой окрестности множества $\operatorname{supp} u$, и положить

$$\langle u(x), \varphi(x) \rangle = \langle u(x), \psi(x)\varphi(x) \rangle, \tag{1.40}$$

где $\psi(x)\varphi(x) \equiv 0$ при $x \in \mathbf{R}^n \setminus \Omega$. Здесь $\psi(x)\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ и определение (1.40) не зависит от выбора функции $\psi(x)$ с указанными свойствами. Легко показать, что $\mathscr{E}'$ — двойственное пространство к $\mathscr{E} \equiv C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Лемма 1.2 ([18], [72]). Если $u\in\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$ и $\operatorname{supp} u=K$, то для $\forall\varepsilon>0$ при некотором целом m справедлива оценка

$$|\langle u, \varphi\rangle|\leqslant C\,\|\varphi\|_{C^{(m)}(K_\varepsilon)}\quad \varphi\in C^\infty(\mathbf{R}^n), \tag{1.41}$$

где через K_ε обозначается ε-окрестность множества K.

Число m (наименьшее) называется (точным) *порядком обобщенной функции* u. Например, для $\delta(x)$ порядок $m=0$, для $\delta^{(\alpha)}(x)$ порядок $m=|\alpha|$.

Пример 1.17. Ряд $u(x)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\delta^{(j)}(x-j)$, $x\in\mathbf{R}$, сходится в $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$, но $\operatorname{supp} u$ — не компакт, и порядок u равен ∞ (т. е. не является конечным).

Из леммы 1.2 легко выводится

Следствие 1.1. ([18], [37]). Если $u\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ и $\operatorname{supp} u=\{a\}$ — одна точка $a\in\mathbf{R}^n$, то

$$u(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}C_\alpha\delta^{(\alpha)}(x-a)$$

при некоторых $m<\infty$ и $C_\alpha\in\mathbf{C}$ (ср. (1.39)).

Обобщим определение (1.40).

Определение 1.8. Если $u(x)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ и $\varphi(x)\in\mathscr{E}\equiv C^\infty(\mathbf{R}^n)$, причем $K\equiv\operatorname{supp} u\cap\operatorname{supp}\varphi$ — ограниченное множество в $\mathbf{R}^n$, то положим

$$\langle u(x),\ \varphi(x)\rangle=\langle u(x),\ \psi(x)\varphi(x)\rangle, \tag{1.42}$$

где $\psi(x)\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ и $\psi(x)=1$ в некоторой окрестности множества K.

Определение (1.42) очевидно не зависит от выбора функции $\psi(x)$ с указанными свойствами.

1.4. Сингулярный носитель обобщенных функций. Аналогично $\operatorname{supp} u$ определяется *сингулярный носитель обобщенной функции* $u(x)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$:

$$\operatorname{sing\,supp} u=\mathbf{R}^n\setminus\Omega^\infty(u),$$
$$\text{где } \Omega^\infty(u)=\bigcup_{\Omega:\,u|_\Omega\in C^\infty(\Omega)}\Omega \tag{1.43}$$

— максимальная область, на которой $u\in C^\infty$.

Для замкнутого множества $K\subset\mathbf{R}^n$ обозначим $\mathscr{D}'S_K=\{u\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n):\operatorname{sing\,supp} u\subset K\}$ или иными словами $\mathscr{D}'S_K=\{u\in\mathscr{D}':u|_{\mathbf{R}^n\setminus K}\in C^\infty(\mathbf{R}^n\setminus K)\}$. По определению $u_m\xrightarrow{\mathscr{D}'S_K}u$, если $u_m\xrightarrow{\mathscr{D}'}u$ и

$$u_m|_{\mathbf{R}^n\setminus K}\xrightarrow{C^\infty(\mathbf{R}^n\setminus K)}u|_{\mathbf{R}^n\setminus K}.$$

Замечание 1.4. Если $\operatorname{sing\,supp} u\subset K$, где $K\subset\mathbf{R}^n$, то подстановка $u(h(y))$ имеет смысл при меньших ограничениях на h, чем выше. А именно, при определении $u(h(y))$ достаточно потребовать, чтобы отображение $h \in C(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n) \cap C^\infty(h^{-1}(\Omega), \Omega)$ и $\operatorname{rank} \frac{\partial h(y)}{\partial y} = n$ лишь в точках $y \in h^{-1}(\Omega)$, где Ω — какая-либо окрестность множества K. При этом отображение $u(x) \mapsto u(h(y))$ непрерывно как отображение $\mathscr{D}'S_K \to \mathscr{D}'(\mathbf{R}^m)$. Поэтому если $u_\lambda(x)$ — непрерывная функция от параметра $\lambda \in \mathbf{C}$ со значениями в $\mathscr{D}'S_K$, то $u_\lambda(h(y))$ также непрерывная функция от $\lambda \in \mathbf{C}$ со значениями в $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^m)$. То же относится к дифференцируемым, голоморфным, мероморфным функциям от параметра (см. [18]).

Пример. 1.18. Пусть $u(x) = \delta_1(x)$, $h(y) = |y|^2 - R^2$ при $y \in \mathbf{R}^m$, $R \in \mathbf{R}$, $R \neq 0$. Тогда из (1.20), (1.18), (1.16) и (1.13) получаем, что

$$\langle \delta_1(|y|^2 - R^2), \varphi(y) \rangle = \frac{1}{2R} \int\limits_{|y|=R} \varphi(y)\, dy. \tag{1.44}$$

Отметим, что $\operatorname{grad}(|y|^2 - R^2) = 0$ при $y = 0$, поэтому $u(|y|^2 - R^2)$ имеет смысл не при всех $u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$.

1.5. Свертка обобщенных функций. Для функций u, $v \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ их *сверткой* называется функция

$$(u * v)(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} u(x-y)\, v(y)\, dy = \int\limits_{\mathbf{R}^n} u(z)\, v(x-z)\, dz, \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{1.45}$$

Свойства свертки основных функций.

1) Из (1.45) следует, что свертка коммутативна, билинейна и ассоциативна: для $u, v, w \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ и $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$

$$u * (\alpha v + \beta w) = \alpha u * v + \beta u * w, \quad u * v = v * u, \quad (u * v) * w = u * (v * w). \tag{1.46}$$

2) Главные свойства свертки — это формулы сдвига и дифференцирования: для $u, v \in \mathscr{D}$

$$T_a(u * v) = (T_a u) * v = u * T_a v,$$

где $T_a u(x) \equiv u(x+a)$, $a \in \mathbf{R}^n$,

$$\partial_x^\alpha (u * v) = (\partial_x^\alpha u) * v = u * \partial_x^\alpha v, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n). \tag{1.47}$$

3) Носитель свертки содержится в алгебраической сумме носителей:

$$\operatorname{supp}(u * v) \subset \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v \equiv \{x = z + y \in \mathbf{R}^n : z \in \operatorname{supp} u,\ y \in \operatorname{supp} v\}. \tag{1.48}$$

4) Отображение $(u, v) \mapsto u * v$ непрерывно как отображение $\mathscr{D} \times \mathscr{D} \to \mathscr{D}$.

Свертка обобщенных функций определяется замыканием по непрерывности свертки основных функций.

Напомним [65], что *прямое произведение обобщенных функций* $u(z) \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ и $v(y) \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^m)$ определяется как функционал $u \times v$, который на основные функции вида $\varphi(z)\psi(y)$ действует по формуле

$$\langle u\times v,\ \varphi(z)\psi(y)\rangle=\langle u,\ \varphi\rangle\langle v,\ \psi\rangle,\ \varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n),\ \psi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^m). \quad (1.49)$$

Предложение 1.3 ([65]). Для $\forall u\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ и $\forall v\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^m)$ существует единственное распределение $u\times v\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m)$, удовлетворяющее тождеству (1.49). Отображение $(u,\ v)\mapsto u\times v$ непрерывно как отображение $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)\times\mathcal{D}'(\mathbf{R}^m)\to\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m)$. При этом

$$\operatorname{supp} u\times v=\operatorname{supp} u\times\operatorname{supp} v. \quad (1.50)$$

Чтобы замкнуть операцию свертки на распределения, заметим, что из (1.45) вытекает тождество: для $u,\ v\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ и $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$

$$\langle u*v,\ \varphi\rangle=\int\int u(x-y)v(y)\varphi(x)\,dxdy=$$
$$=\langle u(z)\times v(y),\ \varphi(y+z)\rangle. \quad (1.51)$$

Последнему выражению можно придать смысл при $u,\ v\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ для $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ с помощью определения 1.8, если

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)\ \text{множество}\ B_\varphi\equiv\operatorname{supp}(u\times v)\cap\operatorname{supp}(\varphi(y+z))$$
$$\text{ограничено в}\ \mathbf{R}^{2n}. \quad (1.52)$$

В силу (1.50) это условие эквивалентно следующему условию на множества $U=\operatorname{supp} u$ и $V=\operatorname{supp} v$:

$$\forall R>0\ \text{множество}\ B_R\equiv(U\times V)\cap\{(z,\ y)\in\mathbf{R}^{2n}:|y+z|<R\}$$
$$\text{ограничено в}\ \mathbf{R}^{2n}. \quad (1.52')$$

Определение 1.9 ([65]). Если $u,v\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ и множества $U=\operatorname{supp} u$ и $V=\operatorname{supp} v$ удовлетворяют условию (1.52′), то свертка $u*v$ определяется тождеством

$$\langle u*v,\ \varphi\rangle=\langle u(z)\times v(y),\ \varphi(z+y)\rangle,\ \varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n), \quad (1.53)$$

где правая часть определена согласно (1.42).

Пример 1.19. $\operatorname{supp}\delta(x)=\{0\}$, так что свертка $\delta*u$ определена для $\forall u\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, и

$$\langle\delta*u,\ \varphi\rangle=\langle\delta(z)\times u(y),\ \varphi(z+y)\rangle=\langle u(y),\ \varphi(y)\rangle\Rightarrow\delta*u=u. \quad (1.54)$$

Условие (1.52′) эквивалентно следующему, более наглядному геометрически:

$$\text{для}\ \forall R>0,\ (x-U)\cap V\subset D_R\ \text{при}\ |x|<R, \quad (1.52'')$$

где D_R — некоторое ограниченное множество в $\mathbf{R}^n$.

Условия (1.52″), (1.52′) выполняются, в частности, в следующих практически важных случаях:

1) Если U или V — ограниченное множество

2) Если $U\subset K$ и $V\subset K$, где K — (выпуклый) конус в $\mathbf{R}^n$, не содержащий прямых. Под *конусом* здесь (и всюду ниже) понимается множество $K\subset\mathbf{R}^n$, для которого $K+K\subset K$ и $tK\subset K$ при $\forall t>0$.

3) Если $U\subset K_R$ и $V\subset K_R$ при некотором $R>0$, где K_R обозначает R-окрестность конуса K, не содержащего прямых.

4) Если U — *асимптотически времениподобное* множество, т. е. для некоторого (большого) $R>0$ справедливо неравенство $|x_1|>\gamma|x'|$ при $x\in U$, $|x|>R$, где $\gamma>1$, $x'\equiv(x_2, \dots, x_n)$, а V — *асимптотически пространственноподобное* множество, т. е. $|x_1|\leqslant|x'|$ при $x\in V$, $|x|>R$. (Например, если $U=\{(t, x)\in\mathbf{R}^4 : x=x(t)\}$, где $|\dot{x}(t)|<1$, т. е. $(t, x(t))$ — времениподобная кривая, а V — *световой конус* $t^2=|x|^2$.)

Замечание 1.5. Если множества U, V удовлетворяют условию (1.52′), то их R-окрестности U_R, V_R при $\forall R>0$ и их сдвиги $U+a_1$ и $V+a_2$ при $\forall a_1$, $a_2\in\mathbf{R}^n$ очевидно, также удовлетворяют этому условию.

Лемма 1.3 ([65]). Пусть множества $U, V\subset\mathbf{R}^n$ удовлетворяют условию (1.52′), (1.52″). Тогда для $u, v\in\mathcal{D}'_U\times\mathcal{D}'_V$ свертка $u*v\in\mathcal{D}'_{U+V}$ и отображение $(u, v)\mapsto u*v$ непрерывно в этих пространствах. Для этой свертки справедливы все формулы (1.47) и (1.48); формулы (1.46) также справедливы, если все входящие в них свертки определены.

Пример 1.20. Из (1.54) и (1.47) вытекает, что для $u\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$

$$\delta^{(\alpha)}*u=\partial_x^\alpha(\delta*u)=\partial_x^\alpha u(x), \quad \forall\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n). \tag{1.55}$$

Поэтому оператор $P(\partial_x)$ из (0.1) является оператором свертки с ядром

$$P_c\equiv P\delta=\sum_{|\alpha|\leqslant m} p_\alpha\partial_x^\alpha\delta(x):$$

$$P_c*u=(P\delta)*u=P(\delta*u)=Pu, \quad u\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n). \tag{1.56}$$

Определение 1.10 ([12]). Если K — конус в $\mathbf{R}^n$, не содержащий прямых, то $\mathcal{D}'_{(K)}$ обозначает множество распределений $u(x)\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, у которых $\operatorname{supp} u\subset K_R$ при некотором $R>0$ (K_R — это R-окрестность множества K); $u_k\xrightarrow{\mathcal{D}'_{(K)}}u$, если $u_k\xrightarrow{\mathcal{D}'}u$ и $\operatorname{supp} u_k\subset K_R$ для $\forall k$ при некотором $R>0$, не зависящем от k.

Как отмечалось выше, для $u, v\in\mathcal{D}'_{K_R}$ свертка определена, поэтому из леммы 1.3 вытекает

Следствие 1.2. Пространства $\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$ и $\mathcal{D}'_{(K)}$ являются алгебрами с единицей $\delta(x)$ (см. (1.54)) относительно свертки, коммутативными и ассоциативными, если K — конус в $\mathbf{R}^n$, не содержащий прямых. Свертка (секвенциально) непрерывна на $\mathscr{E}'\times\mathscr{E}'$ и на $\mathcal{D}'_{(K)}\times\mathcal{D}'_{(K)}$.

Лемма 1.4. Если $u(x)\in\mathcal{D}'$ (или $\mathscr{E}'$), а $v\in\mathcal{D}$ (или $\mathscr{E}$), то $u*v\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, причем

$$(u*v)(x)=\langle u(x-y), v(y)\rangle=\langle u(y), v(x-y)\rangle. \tag{1.57}$$

Это равенство вытекает из (1.45) в силу непрерывности свертки. Из него легко получить, что $u*v\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Покажем, что когда свертка определена, т. е. при условии (1.52), справедливо включение

$$\operatorname{sing\,supp} u*v \subset \operatorname{sing\,supp} u + \operatorname{sing\,supp} v. \qquad (1.58)$$

Действительно, для $\forall\varepsilon>0$ существует разбиение $u=u_\varepsilon+u'_\varepsilon$ и $v=v_\varepsilon+v'_\varepsilon$, где $\operatorname{supp} u_\varepsilon$ и $\operatorname{supp} v_\varepsilon$ лежат в ε-окрестностях $\operatorname{sing\,supp} u$ и $\operatorname{sing\,supp} v$ соответственно, а $u'_\varepsilon, v'_\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. Тогда $u*v=u_\varepsilon*v_\varepsilon+u'_\varepsilon*v_\varepsilon+u_\varepsilon*v'_\varepsilon+u'_\varepsilon*v'_\varepsilon$. По лемме 1.4, здесь все слагаемые, кроме первого, принадлежат $C^\infty(\mathbf{R}^n)$. Остается учесть, что $\operatorname{supp} u_\varepsilon*v_\varepsilon \subset \operatorname{supp} u_\varepsilon+\operatorname{supp} v_\varepsilon$ согласно (1.48), т. е. $\operatorname{supp} u_\varepsilon*v_\varepsilon$ лежит в 2ε-окрестности множества $\operatorname{sing\,supp} u+\operatorname{sing\,supp} v$, а $\varepsilon>0$ произвольно.

Отметим, что в правой части (1.48) и (1.58) сумма множеств является пустым множеством, если одно из слагаемых пусто. При этом левая часть — также пустое множество.

1.6. Граничные значения аналитических функций. Пусть Ω — выпуклое открытое множество в $\mathbf{R}^n$ и пусть $f(x+iy)$ аналитична по $z=x+iy$ в «трубчатой» области $T_\Omega \equiv \mathbf{R}^n+i\Omega$. Рассмотрим распределения

$$f_y(x)=f(x+iy)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}_x^n) \text{ при } \forall y\in\Omega. \qquad (1.59)$$

Предположим, что для каждого открытого конуса $K\subset\mathbf{R}^n$ такого что $K^\delta=\{y\in K: |y|<\delta\}\subset\Omega$ при некотором $\delta>0$,

$$|f(x+iy)|\leqslant\frac{c(x)}{|y|^\nu} \text{ при } y\in K^\delta, \text{ где } c(x)\in C(\mathbf{R}^n), \qquad (1.60)$$

$\nu\in\mathbf{R}$, и $c(x)$ могут зависеть от выбора конуса K и $\delta>0$.

Лемма 1.5 (ср. [12], [62]). При условии (1.60) распределения (1.59) имеют предел при $y\to 0$, $y\in\Omega$, в смысле слабой сходимости в $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$: для $\forall y\in\Omega$

$$f_{\varepsilon y}(x)\equiv f(x+i\varepsilon y)\xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} f(x+i0y)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n), \qquad (1.61)$$

причем предельная (обобщенная) функция $f_0(x)\equiv f(x+i0y)$ не зависит от $y\in\Omega$.

Пример 1.21. Функция $f(z)=\frac{1}{z}$, $z\in\mathbf{C}\setminus 0$, имеет пределы на $\mathbf{R}$ сверху и снизу:

$$\frac{1}{x+i\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to 0\pm]{}\frac{1}{x\pm i0}=\text{v. p. }\frac{1}{x}\pm\pi i\delta(x), \qquad (1.62)$$

где v. p. $\frac{1}{x}$ — *главное значение по Коши* (см. [18], [37] и формулу (2.5′) главы 3).

Пример. 1.22. Функция $f(\xi_0,\xi)=\frac{1}{-\xi_0^2+|\xi|^2}$, $\xi_0\in\mathbf{C}$, $\xi\in\mathbf{C}^k$, аналитична при $|\operatorname{Im}\xi|<|\operatorname{Im}\xi_0|$ и

$$\frac{1}{-(\xi_0 \pm i\varepsilon)^2+|\xi|^2} \underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} \frac{1}{-(\xi_0 \pm i0)^2+|\xi|^2}, \quad \xi_0 \in \mathbf{R}, \quad \xi \in \mathbf{R}^k. \tag{1.63}$$

Аналогично,

$$\frac{1}{-i(\xi_0+i\varepsilon)+|\xi|^2} \underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} \frac{1}{-i(\xi_0+i0)+|\xi|^2},$$
$$\frac{1}{\xi_0 \pm i\varepsilon+|\xi|^2} \underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} \frac{1}{\xi_0 \pm i0+|\xi|^2}. \tag{1.64}$$

В одномерном случае, когда $n=1$ и $\Omega=\mathbf{R}^+$, лемма доказывается так: первообразная $f^{(-m)}(z)$ от $f(z)$ порядка $m=[\nu]+1$ будет непрерывна в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. Поэтому $f^{(-m)}(x+i\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} f^{(-m)}(x)$ в $C(\mathbf{R})$ и тем более в $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$. Но оператор $\frac{d^m}{dx^m}$ (секвенциально) непрерывен в $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$. Поэтому

$$f(x+i\varepsilon)=\frac{d^m}{dx^m} f^{(-m)}(x+i\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{\mathscr{D}'(\mathbf{R})} \frac{d^m}{dx^m} f^{(-m)}(x) \equiv$$
$$\equiv f(x+i0) \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}). \tag{1.65}$$

В общем случае произвольного $n \geqslant 1$ можно сделать в $\mathbf{R}^n$ линейную замену переменных так, чтобы в новых координатах $y=(1, 0, \ldots, 0)$, область $x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$ содержалась в конусе K. Тогда $f(z)$ аналитична по z при $\operatorname{Im} z_1 > 0, \ldots, \operatorname{Im} z_n > 0$, $|z| < \delta_1$. Для доказательства остается провести рассуждение (1.65) по переменной x_1 вместо x при фиксированных остальных переменных $x_2, \ldots, x_n$. При этом первообразные можно выбирать из условия $f^{(-m)}(i\delta_1/2, x_2, \ldots, x_n)=0$.

Определение 1.11. При условиях леммы 1.5, функция $f_0(x)$ называется *граничным значением аналитической функции* $f(x+iy)$ в T_Ω, а $f(x+iy)$ — *аналитическим продолжением обобщенной функции* $f(x)$ в область T_Ω. Введем обозначение

$$f(z)|_{\mathbf{R}^n} \equiv f_0(x). \tag{1.66}$$

1.7. Пространство умеренных распределений. Введем новые классы основных и обобщенных функций.

Определение 1.12. *Пространство Шварца* быстро убывающих функций $S=S(\mathbf{R}^n)$ состоит из комплекснозначных функций $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, для которых при $\forall \alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\forall N>0$

$$|\varphi|_{\alpha,N} \equiv \sup_{x\in\mathbf{R}^n} (1+|x|)^N |\partial_x^\alpha \varphi(x)| < \infty. \tag{1.67}$$

Последовательность $\varphi_k \in S$ сходится к $\varphi \in S$ в пространстве S ($\varphi_k \xrightarrow{S} \varphi$), если для $\forall \alpha$, N выполняется условие

$$|\varphi_k-\varphi|_{\alpha,N} \to 0 \text{ при } k\to\infty.$$

Через $S'(\mathbf{R}^n)$ обозначается, как обычно, пространство линейных непрерывных функционалов на $S(\mathbf{R}^n)$. Функционалы $u \in S'(\mathbf{R}^n)$ называются *умеренно растущими* или просто *умеренными обобщенными функциями* (*или распределениями*).

Очевидно, $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \subset S(\mathbf{R}^n)$ — непрерывное вложение, и $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ всюду плотно в $S(\mathbf{R}^n)$. Поэтому двойственное отображение $S'(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ также является непрерывным вложением (относительно слабой сходимости). Легко показать также, что $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n) \subset S'(\mathbf{R}^n)$. Итак, $S' = S'(\mathbf{R}^n)$ — подмножество в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$. Легко показать, что $S(\mathbf{R}^n)$ всюду плотно в $S'(\mathbf{R}^n)$.

Очевидно, $\delta(x) \in S'$ и $\delta^\alpha(x) \in S'$ при $\forall \alpha$; $e^x \notin S'$, но $e^x \cos e^x = (\sin e^x)' \in S'$.

Поскольку в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ имеются операции дифференцирования, свертки и т. п., они определены и на $S'(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$.
При некоторых условиях они не выводят за рамки $S'(\mathbf{R}^n)$.

Например $\partial_x^\alpha : S'(\mathbf{R}^n) \to S'(\mathbf{R}^n)$ — непрерывный оператор при $\forall \alpha$, поскольку он является сопряженным к непрерывному оператору $(-\partial_x)^\alpha : S(\mathbf{R}^n) \to S(\mathbf{R}^n)$.

Оператор $u(x) \mapsto g(x)u(x)$ непрерывен в $S'(\mathbf{R}^n)$, если для $\forall \alpha$

$$|g^{(\alpha)}(x)| \leqslant c_\alpha (1+|x|)^{p_\alpha}, \quad x \in \mathbf{R}^n \tag{1.68}$$

при некоторых c_α, $p_\alpha \in \mathbf{R}$. Это выводится из непрерывности оператора $\varphi \mapsto g\varphi$ в $S(\mathbf{R}^n)$ при условии (1.68). Оказывается [15] условие (1.68) также необходимо для непрерывности оператора умножения на $g(x)$ в $S'(\mathbf{R}^n)$ (и в $S(\mathbf{R}^n)$).

Условие (1.68) выполняется например, для любого многочлена $g(x)$. Поэтому умножение на произвольный многочлен — непрерывная операция в $S'(\mathbf{R}^n)$ и в $S(\mathbf{R}^n)$.

Обозначим для $\forall k$, $N = 0, 1, 2, \ldots$

$$\|\varphi\|_{k,N} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} |\varphi|_{\alpha,N}. \tag{1.69}$$

Аналогично лемме 1.2, доказывается

Лемма 1.6. Для $\forall u(x) \in S'(\mathbf{R}^n)$ при некоторых C, μ, $N < \infty$ выполняется оценка

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leqslant C \|\varphi\|_{\mu,N}, \quad \varphi \in S(\mathbf{R}^n). \tag{1.70}$$

Примеры 1.22. 1) Если $u(x) \in C(\mathbf{R}^n)$ или $u(x) \in L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$, и при некоторых C и p

$$|u(x)| \leqslant C(1+|x|)^p, \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{1.71}$$

то $u \in S'(\mathbf{R}^n)$, где u — функционал вида (1.2).

2) Если $u(x) \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ и при некотором $N > 0$

$$\int \frac{|u(x)|}{(1+|x|)^N} dx < \infty, \tag{1.72}$$

то $u(x) \in S'(\mathbf{R}^n)$.

Замечание 1.6. Предположим, что функция $c(x)$ в (1.60) допускает оценку вида

$$|c(x)| \leqslant C(1+|x|)^p, \quad x \in \mathbf{R}^n \tag{1.73}$$

Тогда, как видно из доказательства леммы 1.5, предельная функция в (1.61) принадлежит $S'(\mathbf{R}^n)$, и сходимость в (1.61) — это слабая сходимость в $S'(\mathbf{R}^n)$.

§ 2. Фундаментальные решения дифференциальных уравнений

2.1. Фундаментальные решения.

Определение 2.1. *Фундаментальным решением дифференциального оператора* $P(\partial_x)$ *и уравнения* (0.1) называется распределение $\mathscr{E}(x) \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, для которого

$$P(\partial_x)\mathscr{E}(x) = \delta(x), \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{2.1}$$

Примеры фундаментальных решений для обыкновенных уравнений приведены в (1.11). Решения уравнения (0.1) с произвольной правой частью $f(x)$ выражаются при помощи свертки с фундаментальными решениями оператора $P(\partial_x)$.

Предложение 2.1. 1) Если решение $u(x)$ уравнения (0.1) принадлежит $\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$, то также $f(x) \in \mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$, и

$$u(x) = \mathscr{E} * f(x). \tag{2.2}$$

2) Если правая часть $f(x)$ уравнения (0.1) принадлежит $\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$, то функция (2.2) является его (частным) решением.

Доказательство. 1) Если $u \in \mathscr{E}'$, то из (0.1) вытекает, что

$$\mathscr{E} * Pu = \mathscr{E} * f. \tag{2.3}$$

Но $\mathscr{E} * Pu = P\mathscr{E} * u = \delta * u = u$ согласно (1.47). Поэтому из (2.3) вытекает (2.2). 2) Если $f \in \mathscr{E}$, то для функции (2.2), ввиду (2.1), получаем

$$Pu = p\mathscr{E} * f = \delta * f = f. \tag{2.4}$$

Предложение 2.1 означает, что оператор $\mathscr{E} * : f \mapsto \mathscr{E} * f$ является левым обратным к оператору P на области определения $\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$ и правым обратным к P на области определения $P^{-1}\mathscr{E}' = \{u \in \mathscr{D}' : Pu \in \mathscr{E}'\}$.

Построение и изучение свойств различных фундаментальных решений дифференциальных операторов является одной из главных задач теории дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В § 1 главы 3 будет доказана

Теорема 2.1 ([18], [37], [46], [58]). Любой дифференциальный оператор $P(\partial_x)$ имеет фундаментальное решение $\mathscr{E}(x) \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, если только $P \neq 0$.

Существенно труднее доказывается

Теорема 2.2 ([4], [5], [52], [57]). Любой оператор $P(\partial_x)\neq 0$ имеет умеренное фундаментальное решение $\mathscr{E}(x)$, т. е. $\mathscr{E}(x)\in S'(\mathbf{R}^n)$.

Фундаментальное решение неединственно, т. к. к нему можно прибавить любое решение однородного уравнения. Эту неединственность иногда удается использовать для того, чтобы получать решения по формуле (2.2) при различных условиях на носитель правой части $f(x)$. Нужно лишь подобрать $\mathscr{E}(x)$ так, чтобы множества $U=\operatorname{supp}\mathscr{E}$ и $V=\operatorname{supp} f$ удовлетворяли условию (1.52′).

Тогда свертка $\mathscr{E}*f$ определена, и функция $u=\mathscr{E}*f$ является решением уравнения (0.1), что вытекает из (2.4). Таким образом, мы получаем следующее обобщение предложения 2.1:

Предложение 2.2. 1) Пусть $u(x)$ — решение уравнения (0.1), а $\mathscr{E}(x)$ — некоторое фундаментальное решение оператора $P(\partial_x)$, и множества $U=\operatorname{supp}\mathscr{E}$ и $V=\operatorname{supp} u$ удовлетворяют условию (1.52′). Тогда данное решение u выражается формулой (2.2). 2) Если $U=\operatorname{supp}\mathscr{E}$ и $V=\operatorname{supp} f$ удовлетворяют условию (1.52′), то $U=\mathscr{E}*f$ является частным решением уравнения (0.1).

2.2. Примеры фундаментальных решений.

Пример 2.1. Для нахождения решения уравнения

$$\left(\frac{d}{dt}+\lambda\right)u(t)=f(t),\quad t\in\mathbf{R}, \tag{2.5}$$

по формуле (2.2) в случае, когда $f(t)=0$ при $t\leqslant 0$, нужно брать фундаментальное решение

$$\mathscr{E}^{\pm}(t)=\pm\theta(\pm t)e^{-\lambda t},\quad t\in\mathbf{R}. \tag{2.5′}$$

Эти фундаментальные решения называются *запаздывающим* ($\mathscr{E}^+$) и *опережающим* ($\mathscr{E}^-$). Это связано с тем, что в случае $f\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$ свертка $\mathscr{E}^+*f=u^+$, согласно (1.57), выражается формулой

$$u^+(t)=\mathscr{E}^+*f(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}\mathscr{E}^+(t-\tau)f(\tau)\,d\tau,\quad t\in\mathbf{R}, \tag{2.5″}$$

зависит лишь от $f(\tau)$ при $\tau<t$, а

$$u^-(t)=\mathscr{E}^-*f(t)=\int\limits_{t}^{\infty}\mathscr{E}^-(t-\tau)f(\tau)\,d\tau,\quad t\in\mathbf{R}, \tag{2.5‴}$$

зависит лишь от $f(\tau)$ при $\tau>t$. Соответственно, решения (2.5″) и (2.5‴) называются *запаздывающим* и *опережающим потенциалом*.

Пример 2.2. Аналогично, для ***волнового уравнения в*** $\mathbf{R}^k$, $k\geqslant 1$,

$$\Box u=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\Delta\right)u(x,t)=f(x,t),\ t\in\mathbf{R},\ x\in\mathbf{R}^k;\ a>0, \tag{2.6}$$

запаздывающие и опережающие фундаментальные решения [12] соответственно имеют вид ([14]):

$$\mathscr{E}_1^{\pm}=\frac{1}{2a}\,\theta(\pm at-|x|);\quad \mathscr{E}_2^{\pm}=\frac{\theta(\pm at-|x|)}{2\pi a\sqrt{(at)^2-|x|^2}};\tag{2.6'}$$

$$\mathscr{E}_3^{\pm}=\frac{\theta(\pm t)}{2\pi a}\,\delta((at)^2-|x|^2)=\frac{\theta(\pm t)}{4\pi a^2|t|}\,\delta(a|t|-|x|).$$

Эти фундаментальные решения Даламбера ($k=1$), Пуассона ($k=2$) и Кирхгофа ($k=3$) будут получены в главе 4; они позволяют находить решения уравнения $\Box u=f(x, t)$ по формуле (2.2) в случаях, когда $f=0$ при $t\leqslant 0$ соответственно.

Пример 2.3. Для *уравнения Клейна—Гордона* в $\mathbf{R}^k$

$$(\Box+m_0^2)u(x, t)=f(x, t),\ t\in\mathbf{R},\ x\in\mathbf{R}^k;\ m_0>0,\tag{2.7}$$

запаздывающие и опережающие фундаментальные решения при $k=1, 2, 3$ соответственно имеют вид [6], [14], [62] (переходящий в (2.6′) при $m_0\to 0$):

$$\mathscr{E}_1^{\pm}=\frac{\theta(\pm at-|x|)}{2a}\,J_0\left(m_0\sqrt{t^2-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right),\tag{2.7'}$$

$$\mathscr{E}_2^{\pm}=\sqrt{\frac{m_0}{8\pi a^3}}\,\theta(\pm at-|x|)\,\frac{J_{-1/2}\left(m_0\sqrt{t^2-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)}{((at)^2-x^2)^{1/4}}=$$

$$=\frac{\theta(\pm at-|x|)}{2\pi a}\,\frac{\operatorname{Cos} m_0\sqrt{t^2-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}{\sqrt{(at)^2-x^2}},$$

$$\mathscr{E}_3^{\pm}=\frac{\theta(\pm t)}{2\pi a}\,\delta((at)^2-|x|^2)-\frac{m_0\theta(\pm at-|x|)}{4\pi a^2}\,\frac{J_1\left(m_0\sqrt{t^2-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)}{\sqrt{(at)^2-x^2}}.$$

Пример 2.4. Для *уравнения теплопроводности* (*диффузии*)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\Delta\right)u(x, t)=f(x, t),\ t\in\mathbf{R},\ x\in\mathbf{R}^k;\ a>0,\tag{2.8}$$

запаздывающее фундаментальное решение имеет вид гауссовского распределения [15], [55]

$$\mathscr{E}_k^{+}(x, t)=\frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^k}\,e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\tag{2.8'}$$

с дисперсией $\sim a\sqrt{t}$ в момент времени $t>0$.

Пример 2.5. *Уравнение Шрёдингера*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-ia^2\Delta\right)\psi(x, t)=f(x, t),\ t\in\mathbf{R},\ x\in\mathbf{R}^k;\ a>0,\tag{2.9}$$

имеет запаздывающее и опережающее фундаментальные решения вида, аналогичного (2.8′) [55]:

$$\mathscr{E}_k^{\pm}(x, t)=\frac{\pm\theta(\pm t)}{(2a\sqrt{\pi i t})^k}\, e^{\frac{i x^2}{4a^2 t}}; \quad \left(\sqrt{\pm i}\equiv\frac{1\pm i\sqrt{2}}{2}\right). \tag{2.9'}$$

Пример 2.6. *Уравнение Лапласа* в $\mathbf{R}^n$

$$\Delta u(x)=f(x), \quad x\in\mathbf{R}^n, \tag{2.10}$$

имеет фундаментальные решения [14]

$$\mathscr{E}_n(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{(n-2)\,\Omega_n}\,\dfrac{1}{|x|^{n-2}}, & n\neq 2,\\ -\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|x|}, & n=2,\end{cases} \tag{2.10'}$$

где Ω_n—площадь сферы $|x|=1$ в $\mathbf{R}^n$. В частности, $\mathscr{E}_1(x)=\frac{|x|}{2}$.

Пример 2.7. *Уравнение Гельмгольца*

$$(\Delta+\omega^2)\,u(x)=f(x), \quad x\in\mathbf{R}^k, \quad \omega>0, \tag{2.11}$$

получается из волнового уравнения (2.6) при подстановке $u(x, t)=u(x)e^{i\omega t}$ и $f(x, t)=f(x)e^{i\omega t}$. Его фундаментальные решения при $k=1, 2, 3$ соответственно имеют вид

$$\mathscr{E}_1^{\pm}=\frac{e^{\pm i\omega|x|}}{\pm 2i\omega}, \quad \mathscr{E}_2^{\pm}=\begin{cases}-\dfrac{i}{4}H_0^{(1)}(\omega|x|)\\ \dfrac{i}{4}\overline{H_0^{(1)}(\omega|x|)}\end{cases}, \quad \mathscr{E}_3^{\pm}=-\frac{e^{\pm i\omega|x|}}{4\pi|x|}, \tag{2.11'}$$

где $H_0^{(1)}$—функция Ханкеля [41], [71].

Эти фундаментальные решения позволяют находить по формуле (2.2) предельную амплитуду $u(x)$ решения $u(x, t)$ по амплитуде $f(x)$ внешних источников $f(x, t)$ (сил, давления, токов и пр.). При этом свертка с $\mathscr{E}_k^+$ дает предельную амплитуду $u^+(x)$ расходящейся волны, а с $\mathscr{E}_k^-$—амплитуду $u^-(x)$ сходящейся волны. Дело в том, что решение уравнения (2.11) неединственно, и для однозначного определения решения требуется задание «краевых условий» при $|x|\to\infty$. Амплитуда $u^+(x)$ удовлетворяет условию Зоммерфельда отсутствия излучения (из бесконечности) и соответствует волне, излучаемой источником с плотностью $f(x)$. Напротив, $u^-(x)$ соответствует волне, приходящей из бесконечности и поглощаемой средой с интенсивностью поглотителей $f(x)$. Подробности читатель найдет в [8], [22], [36].

Все фундаментальные решения (2.6′), (2.7′), (2.10′), (2.11′) будут получены единым методом в главе 4 (относительно фундаментальных решений (2.8′) и (2.9′) см. [14], [55]).

2.3. Распространение волн. По формуле (2.2) можно найти частное решение уравнения (2.6) при $f(x, t)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{k+1})$. А именно, из (2.6′) и (2.2) получаем частное решение уравнения (2.6) в виде (1.57):

$$u_k^{\pm}(x, t)=\langle\, \mathscr{E}_k^{\pm}(x-y, t-\tau), f(y, \tau)\,\rangle. \tag{2.12}$$

Отсюда при $k=1$

$$u_1^+(x, t)=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{t}\left(\int_{|y-x|\leqslant a(t-\tau)} f(y, \tau)\,dy\right)d\tau; \qquad (2.12')$$

аналогично, при $k=2$

$$u_2^+(x, t)=\frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{t}\left(\int_{|y-x|\leqslant a(t-\tau)} \frac{f(y, \tau)\,dy}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|x-y|^2}}\right)d\tau; \qquad (2.12'')$$

и при $k=3$

$$u_3^+(x, t)=\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{-\infty}^{t}\left(\int_{|y-x|=a(t-\tau)} f(y, \tau)\,dy\right)d\tau. \qquad (2.12''')$$

Замечание 2.1. 1) Обозначим $Q^+=\{(x, t)\in\mathbb{R}^{k+1}: |x|\leqslant at\}$, и $\mathcal{D}=\operatorname{supp} f(x, t)$. Тогда, согласно (1.48), для решений (2.12′)—(2.12‴), очевидно, $\operatorname{supp} u_k^+\subset\mathcal{D}+Q^+$, поскольку $\operatorname{supp}\mathcal{E}_k^+\subset Q^+$. Но $\mathcal{D}+Q^+$ пересекается с каждой плоскостью $t=t_0$ в $\mathbb{R}^{k+1}$ по множеству диаметра $\leqslant d+at_0$, где d — диаметр области $\mathcal{D}$. Следовательно, $u_k^+(x, t_0)=0$ при $|x|\geqslant \text{const}+at_0$, т. е. «волна» $u_k^+(x, t)$ имеет резкий передний фронт и распространяется со скоростью $\leqslant a$.

С другой стороны, при $k=3$ на самом деле $\operatorname{supp}\mathcal{E}_k^+\subset Q^+\equiv\equiv\partial Q^+$, так что $\operatorname{supp} u_3^+\subset\mathcal{D}+Q^+$. Но $\mathcal{D}+Q^+$ представляет собой «раздутый» конус Q^+ толщины $\approx d$. Следовательно, $u_3^+(x, t_0)=0$ при $|x|\leqslant at_0-\text{const}$, т. е. волна u_3^+ имеет также резкий и задний фронт. Оказывается (см. гл. 4, следствие 4.1), при всех нечетных $k\geqslant 3$, аналогично, для волнового уравнения (2.6) в $\mathbb{R}^k$ существует (и единственно по предложению 6.2 главы 5) запаздывающее фундаментальное решение $\overset{+}{\mathcal{E}}_k$, сосредоточенное на конусе Q^+. Следовательно, при этом «запаздывающие» решения $u_k^+\equiv\mathcal{E}_k * f$ уравнения (2.6) при $f\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{k+1})$ имеют резкий передний и задний фронт. Напротив, при всех четных $k\geqslant 2$ и при $k=1$ $\operatorname{supp}\mathcal{E}_k^+$ совпадает с Q^+, и решения $\overset{+}{u}_k$ резкого заднего фронта, вообще говоря, не имеют (как говорят, имеет место «диффузия» волн). 2) Для уравнения Клейна—Гордона (2.7) при всех $k=1, 2, 3, \ldots$ запаздывающее фундаментальное решение $\overset{+}{\mathcal{E}}_k$ сосредоточено в Q^+, но не в Q^+ (см. формулу (5.12) главы 4). Следовательно, «запаздывающие» решения $\overset{+}{u}_k\equiv f*\overset{+}{\mathcal{E}}_k$ уравнения (2.7) при всех k имеют резкий передний фронт и распространяются со скоростью $\leqslant a$, а резкого заднего фронта, вообще говоря, не имеют.

3) Для уравнений теплопроводности (2.8) и Шрёдингера (2.9) при всех $k=1, 2, 3,\ldots$ носители запаздывающих фундаментальных решений $\overset{+}{\mathcal{E}}_j$ совпадают со всем полупространством $t\geqslant 0$.

Поэтому запаздывающие решения $u \equiv \mathscr{E}_k * f$ не имеют переднего фронта (как и заднего), т. е. скорость их распространения бесконечна.

2.4. Построение фундаментальных решений обыкновенных дифференциальных уравнений. При $n=1$ фундаментальные решения легко строятся для любого оператора $P \neq 0$. А именно, если $p_m \neq 0$, то обозначим через $\mathscr{E}_+(x)$ решение задачи Коши

$$\begin{cases} P\mathscr{E}_+(x) = \sum_{k=0}^{m} p_k \mathscr{E}_+^{(k)}(x) = 0, \quad x > 0, \\ \mathscr{E}_+(0+) = 0, \ldots, \mathscr{E}_+^{(m-2)}(0+) = 0, \ \mathscr{E}_+^{(m-1)}(0+) = 1/p_m. \end{cases} \tag{2.14}$$

Лемма 2.1. Продолжим $\mathscr{E}_+(x)$ нулем для $x<0$: положим

$$\mathscr{E}(x) = \begin{cases} \mathscr{E}_+(x), & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Тогда $\mathscr{E}(x)$ — фундаментальное решение оператора

$$P = \sum_{k=0}^{m} p_k \frac{d^k}{dx^k}.$$

Доказательство. По формуле (1.10), последовательно получаем для $k = 0, \ldots, m-1$:

$$\mathscr{E}^{(k)}(x) = \{\mathscr{E}^{(k)}(x)\}, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{2.16}$$

Поскольку $h_k = \mathscr{E}^{(k-1)}(0+) - \mathscr{E}^{(k-1)}(0-) = 0$ при $k = 1, \ldots, m-1$, ввиду (2.14), (2.15), а для $k=m$

$$\mathscr{E}^{(m)}(x) = \{\mathscr{E}^{(m)}(x)\} + \frac{1}{p_m}\delta(x). \tag{2.17}$$

Умножая (2.16), (2.17) на p_k и p_m и суммируя, получаем (2.1), поскольку $\mathscr{E}(x)$ при $x \neq 0$ удовлетворяет однородному уравнению

$$P\mathscr{E}(x) = 0.$$

2.5. Теорема о среднем. Основой для изучения гладкости решений уравнений (0.1) является следующая *теорема о среднем* [18], [37].

Пусть точка $x_0 \in \mathbf{R}^n$ и $\varphi(x)$, $\hat{\varphi}(x)$, $\hat{\hat{\varphi}}(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, причем $x_0 \in \omega$, где ω — открытая область в $\mathbf{R}^n$ и, кроме того,

$$\begin{gathered} \varphi(x) \equiv 1 \text{ при } x \in \omega, \quad \hat{\varphi}(x) \equiv 1 \text{ при } x \in \operatorname{supp} \varphi, \\ \hat{\hat{\varphi}}(x) \equiv 1 \text{ при } x \in \operatorname{supp} \hat{\varphi}. \end{gathered} \tag{2.18}$$

Пусть $u(x)$ — произвольное решение уравнения (0.1) в некоторой области $\Omega \supset \operatorname{supp} \hat{\varphi} \supset \omega$. Обозначим

$$w(x) = \hat{\hat{\varphi}}(x)(1 - \hat{\varphi}(x))\, u(x). \tag{2.19}$$

Очевидно

$$\operatorname{supp} w \subset \operatorname{supp} \hat{\hat{\varphi}} \setminus \omega. \tag{2.20}$$

Лемма 2.2. Пусть $\mathscr{E}(x) \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ — произвольное фундаментальное решение оператора $P(\partial_x)$. Тогда $u(x)$ при $x \in \omega$ выражается через f и w следующим образом:

$$u(x) = \mathscr{E} * (\hat{\varphi} f - Pw)(x), \quad x \in \omega. \tag{2.21}$$

Доказательство. Из (0.1) следует, что

$$P(\varphi u) = f - P((1-\varphi)u) = \varphi(f - P((1-\varphi)u)) =$$
$$= \hat{\varphi} f - P(\hat{\hat{\varphi}}(1-\varphi)u). \tag{2.22}$$

Отсюда, поскольку $\varphi u \in \mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$, то

$$\varphi u = \mathscr{E} * (\hat{\varphi} f - Pw). \tag{2.23}$$

Отметим, что формула (2.21) выражает решение $u(x)$ при $x \in \omega$ через правую часть уравнения (0.1) и «значения» решения $u(x)$ в области $\operatorname{supp} \hat{\hat{\varphi}} \setminus \omega$. Таким образом, (2.21) является аналогом формулы Пуассона для гармонических функций.

Следствие 2.1. Если $f(x) \in C^\infty(\Omega)$, а решение $u(x)$ уравнения (0.1) — гладкое в окрестности $\partial\Omega$, то $u(x) \in C^\infty(\Omega)$.

Доказательство. Возьмем область $\omega \subset \Omega$ так, чтобы $u \in C^\infty(\Omega \setminus \omega)$, и функции φ, $\hat{\varphi}$, $\hat{\hat{\varphi}} \in C_0^\infty(\Omega)$, удовлетворяющие условиям (2.18). Тогда $\hat{\varphi} f \in C_0^\infty(\Omega)$ и $w \in C_0^\infty(\Omega)$. Поэтому из (2.21) следует, что $u \in C^\infty(\omega)$.

Формула (2.21) позволяет также получать гораздо более тонкие результаты о гладкости решений уравнений вида (0.1) (см. [23]).

Глава 2

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В этой главе строятся разложения вида (0.2) для любых обобщенных функций и изучаются свойства этих разложений.

§ 1. Преобразование Фурье основных функций

1.1. Преобразование Фурье быстроубывающих функций. Любую функцию $\varphi(x) \in S(\mathbf{R}^n)$, в частности $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, можно разложить в *интеграл Фурье*

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix\xi} \tilde{\varphi}(\xi)\, d\xi \equiv F^{-1}\varphi; \quad x\xi = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n, \tag{1.1}$$

где «коэффициенты Фурье» $\tilde{\varphi}(\xi)$ находятся по формуле

$$\tilde{\varphi}(\xi)=\int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\xi}\varphi(x)\,dx\equiv F\varphi,\quad \xi\in\mathbf{R}^n. \tag{1.2}$$

Через F мы обозначили оператор преобразования $\varphi\mapsto\tilde{\varphi}$, а через F^{-1} — обратный оператор $\tilde{\varphi}\mapsto\varphi$.

1.2. Свойства преобразования Фурье.

1) Формулы дифференцирования. Из (1.1) и (1.2) вытекает, что $\partial_x^\alpha\varphi(x)=(2\pi)^{-n}\int(-i\xi)^\alpha e^{-ix\xi}\tilde{\varphi}(\xi)\,d\xi$ и $\partial_\xi^\alpha\tilde{\varphi}(\xi)=\int(ix)^\alpha e^{ix\xi}\varphi(x)\,dx$ для $\forall\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Поэтому для $\varphi\in S$

$$F\partial_x^\alpha\varphi=(-i\xi)^\alpha\tilde{\varphi}(\xi),\quad F(x^\alpha\varphi(x))=(-i\partial_\xi)^\alpha\ \forall\alpha. \tag{1.3}$$

2) Формулы сдвига. Из (1.1) вытекает, что для $\varphi\in S(\mathbf{R}^n)$

$$F(\varphi(x+a))=e^{-ia\xi}\tilde{\varphi}(\xi),\quad F(e^{iax}\varphi(x))=\tilde{\varphi}(\xi+a)\ \forall a\in\mathbf{R}^n. \tag{1.4}$$

3) Предложение 1.1 ([18], [37]). Оператор F является изоморфизмом $S(\mathbf{R}^n)$ на $S(\mathbf{R}^n)$.

4) Определим свертку $\varphi*\psi$ для $\varphi,\psi\in S(\mathbf{R}^n)$ по формуле (1.45) главы 1. Тогда, по теореме Фубини, для $\xi\in\mathbf{R}^n$

$$F(\varphi*\psi)(\xi)=\int e^{ix\xi}\left(\int\varphi(x-y)\,\psi(y)\,dy\right)dx=$$

$$=\int e^{i\xi y}\left(\int e^{i\xi(x-y)}\varphi(x-y)\,dx\right)\psi(y)\,dy=\tilde{\varphi}(\xi)\,\tilde{\psi}(\xi),$$

$$F(\varphi\psi)(\xi)=\int e^{ix\xi}\varphi(x)\left((2\pi)^{-n}\int e^{-ix\eta}\tilde{\psi}(\eta)\,d\eta\right)dx=(2\pi)^{-n}(\tilde{\varphi}*\tilde{\psi})(\xi).$$

Итак, для $\varphi,\psi\in S(\mathbf{R}^n)$

$$F(\varphi*\psi)(\xi)=\tilde{\varphi}(\xi)\,\tilde{\psi}(\xi),\quad F(\varphi\psi)(\xi)=(2\pi)^{-n}(\tilde{\varphi}*\tilde{\psi})(\xi),\quad \xi\in\mathbf{R}^n. \tag{1.5}$$

1.3. Преобразование Фурье финитных функций. Если $\varphi(x)\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, то из (1.2) видно, что $\tilde{\varphi}(\xi)$ — целая функция на $\mathbf{C}^n$. При этом

$$|\tilde{\varphi}(\xi)|\leqslant Ce^{A|\operatorname{Im}\xi|},\quad \xi\in\mathbf{C}^n, \tag{1.6}$$

если $\varphi(x)\equiv 0$ при $|x|>A$. Обозначим $\mathscr{D}_A\equiv\{\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n):\varphi(x)\equiv 0$ при $|x|>A\}$. Если $\varphi\in\mathscr{D}_A$, то $x^\alpha\varphi(x)\in\mathscr{D}_A$, и $\partial_x^\alpha\varphi(x)\in\mathscr{D}_A$. Поэтому, ввиду (1.3), функции $\partial_\xi^\alpha\tilde{\varphi}(\xi)$ и $\xi^\alpha\tilde{\varphi}(\xi)$ также удовлетворяют оценкам вида (1.6).

Теорема 1.1 (Пэли — Винер, [12], [18], [37]). Если $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, то $\tilde{\varphi}(\xi)$ — целая функция на $\mathbf{C}^n$ и для любых α и $N>0$

$$(1+|\xi|)^N|\partial_\xi^\alpha\tilde{\varphi}(\xi)|\leqslant C_{\alpha,N}e^{A|\operatorname{Im}\xi|},\quad \xi\in\mathbf{C}^n \tag{1.7}$$

при некоторых A, $C_{\alpha,N}\geqslant 0$, зависящих от φ. Обратно, если $\tilde{\varphi}(\xi)$ — произвольная целая функция на $\mathbf{C}^n$, удовлетворяющая оценкам вида (1.7) для любых α, N, то $\varphi(x)\equiv F^{-1}\tilde{\varphi}\in\mathscr{D}_A(\mathbf{R}^n)$.

Определение 1.1. Через $Z = Z(\mathbf{C}^n)$ обозначается пространство целых функций $\tilde{\varphi}$ в $\mathbf{C}^n$, удовлетворяющих оценкам вида (1.7) при $\forall\alpha, N$. По определению, последовательность $\psi_k \in Z$ сходится к $0 \in Z$ ($\psi_k \xrightarrow{Z} 0$), если при некотором $A > 0$

$$|\psi_k|_{\alpha,N} \equiv \sup_{\xi \in \mathbf{C}^n} e^{-A|\mathrm{Im}\,\xi|}(1+|\xi|)^N |\partial_\xi^\alpha \psi_k(\xi)| \underset{k\to\infty}{\to} 0 \ \forall\alpha, N. \quad (1.8)$$

Теорема 1.1′ ([18], [37]). Оператор $F: \mathcal{D} \to Z$ непрерывен, и обратный $F^{-1}: Z \to \mathcal{D}$ — также.

Для $\varphi \in \mathcal{D}$ справедливы все свойства преобразования Фурье (1.3), (1.4), причем второе равенство в (1.4) справедливо при всех $a \in \mathbf{C}^n$.

§ 2. Преобразование Фурье умеренных обобщенных функций

2.1. Замыкание преобразования Фурье по непрерывности. Преобразование Фурье $F: S \to S$ оказывается возможно продолжить по непрерывности на $S'(\mathbf{R}^n)$. Для этого нужно заметить, что при любых $u \in S(\mathbf{R}^n)$ справедливо *равенство Парсеваля*

$$\langle \tilde{u}(\xi), \varphi(\xi) \rangle = \langle u(x), \tilde{\varphi}(x) \rangle \quad \forall\varphi \in S(\mathbf{R}^n), \quad (2.1)$$

которое получается непосредственно из (1.2). Отсюда замыканием по непрерывности получаем

Определение 2.1. Для $u(x) \in S'(\mathbf{R}^n)$ функционал $Fu = \tilde{u}(\xi)$ определяется тождеством (2.1).

Предложение 2.1. Оператор $F: u \mapsto \tilde{u}$ непрерывно действует из $S'(\mathbf{R}^n)$ в $S'(\mathbf{R}^n)$. Аналогично, оператор $F^{-1}: \tilde{u} \mapsto u$ является непрерывным отображением $S'(\mathbf{R}^n)$ на $S'(\mathbf{R}^n)$.

Пример 2.1. 1) Для $u(x) = \delta(x)$ при $\forall\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$, в силу (1.2),

$$\langle \tilde{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \tilde{\varphi} \rangle = \tilde{\varphi}(0) = \int \varphi(\xi)\, d\xi = \langle 1, \varphi \rangle \Rightarrow \tilde{\delta}(\xi) \equiv 1,$$
$$\xi \in \mathbf{R}^n. \quad (2.2)$$

2) Обратно, для $u(x) \equiv 1$ имеем, в виду (1.1),

$$\langle \tilde{1}, \varphi \rangle = \langle 1, \tilde{\varphi} \rangle = \int \tilde{\varphi}(x)\, dx = (2\pi)^n \varphi(0) \Rightarrow \tilde{1} = (2\pi)^n \delta(x). \quad (2.3)$$

2.2. Свойства преобразования Фурье.

1) Из (1.3) замыканием по непрерывности получаем для $\forall u \in S'(\mathbf{R}^n)$

$$F(\partial_x^\alpha u(x)) = (-i\xi)^\alpha \tilde{u}(\xi), \quad F(x^\alpha u(x)) = (-i\partial_\xi)^\alpha \tilde{u}(\xi) \ \forall\alpha. \quad (2.4)$$

Следствие 2.1. Для любого оператора $P(\partial_x)$ вида (0.1)

$$F(P(\partial_x)u(x)) = P(-i\xi)\tilde{u}(\xi) = \tilde{P}(\xi)\tilde{u}(\xi), \quad u \in S'(\mathbf{R}^n), \quad (2.5)$$

где $P(-i\xi) = \tilde{P}(\xi)$ — многочлен

$$P(-i\xi) \equiv \tilde{P}(\xi) = \sum_{|\alpha| < m} p_\alpha (-i\xi)^\alpha, \quad \xi \in \mathbf{R}^n. \quad (2.6)$$

Определение 2.2. Многочлен $\tilde{P}(\xi)\equiv P(-i\xi)$ называется *символом оператора* $P(\partial_x)$.

Из (2.2), (2.3), ввиду (2.4), получаются формулы

$$F(\delta^{(\alpha)}(x))=(-i\xi)^{\alpha}, \quad Fx^{\alpha}=(2\pi)^n(-i)^{|\alpha|}\delta^{(\alpha)}(\xi) \ \forall\alpha. \tag{2.7}$$

2) Из (1.4) замыканием по непрерывности, получаем

$$F(u(x+a))=e^{-ia\xi}\tilde{u}(\xi), \quad F(e^{iax}u(x))=\tilde{u}(\xi+a), \quad a\in\mathbf{R}^n, \quad u\in S'(\mathbf{R}^n). \tag{2.8}$$

Например, отсюда, ввиду (2.2), (2.3), получаются формулы

$$F(\delta(x+a))=e^{-ia\xi}, \quad F(e^{iax})=(2\pi)^n\delta(\xi+a), \quad a\in\mathbf{R}^n. \tag{2.9}$$

3) Из (1.5) замыканием по непрерывности, нетрудно вывести, что

$$F(u*v)=\tilde{u}(\xi)\tilde{v}(\xi) \text{ для } (u,v)\in S\times S' \text{ (или } S'\times S). \tag{2.10}$$

Аналогично, из (1.5) можно вывести, что

$$F(uv)=\tilde{u}*\tilde{v} \text{ для } u\in S'(\mathbf{R}^n), \quad v\in S(\mathbf{R}^n). \tag{2.11}$$

Свертку $\tilde{u}*\tilde{v}$ здесь можно определить, например, по формуле (1.57) главы 1.

4) Теория Парсеваля. Заметим, что $F:S'(\mathbf{R}^n)\to S'(\mathbf{R}^n)$ изоморфизм, согласно предложению 2.1. В частности, $F:L_2(\mathbf{R}^n)\to S'(\mathbf{R}^n)$.

Теорема 2.1. (Парсеваль, [18], [37], [68]). Оператор F является изоморфизмом $L_2(\mathbf{R}^n)$ на $L_2(\mathbf{R}^n)$, причем

$$\int|\tilde{u}(\xi)|^2d\xi=(2\pi)^n\int|u(x)|^2dx. \tag{2.12}$$

5) Линейные замены переменных. Если $C\in GL_{\mathbf{R}}(n)$, то для $u(x)\in S'(\mathbf{R}^n)$ обозначим $u_C(y)=u(Cy)$, $y\in\mathbf{R}^n$ (см. формулу (1.33) главы 1). Тогда

$$\tilde{u}_C(\eta)=\frac{1}{|\det C|}\tilde{u}((C^{-1})^t\eta), \quad \eta\in\mathbf{R}^n. \tag{2.13}$$

В частности, если $C\in O(n)$, то

$$\tilde{u}_C(\eta)=\tilde{u}(C\eta)=(\tilde{u})_C(\eta), \quad \eta\in\mathbf{R}^n. \tag{2.14}$$

Действительно, для $u(x)\in S$ формула (2.13) вытекает из (1.2):

$$\tilde{u}_C(\eta)=\int e^{iy\eta}u(Cy)\,dy=$$

$$=\int e^{i(C^{-1}x)\eta}u(x)\frac{dx}{|\det C|}=\frac{1}{|\det C|}\tilde{u}((C^{-1})^t\eta), \quad \eta\in\mathbf{R}^n,$$

а для $u\in S'$ она получается замыканием по непрерывности.

Следствие 2.2. Из (2.14) вытекает, что при ортогональных заменах координат в $\mathbf{R}^n$ преобразование Фурье $\tilde{u}(\xi)$ обобщенной функции $u(x)\in S'(\mathbf{R}^n)$ преобразуется как (инвариантно определенная) обобщенная функция на $\mathbf{R}^n$. Поэтому, в силу (2.5), символ $\tilde{P}(\xi)$ дифференциального оператора $P(\partial_x)$ при ортогональных заменах переменных также преобразуется как инвариантно определенная функция на $\mathbf{R}^n$.

С другой стороны, при общих заменах переменных $C \in GL_{\mathbf{R}}(n)$ (2.13) и (2.5) получаем, что символ $\tilde{P}_C$ оператора $P(\partial_x)$ в координатах $y=C^{-1}x$ имеет вид

$$\tilde{P}_C(\eta)=\tilde{P}((C^{-1})^t\eta), \quad \eta \in \mathbf{R}^n. \tag{2.15}$$

Следствие 2.3. Символ P оператора P является инвариантно определенной функцией на $\mathbf{R}^{n*}$ — двойственном к $\mathbf{R}^n$ пространстве, состоящем из линейных (непрерывных) функционалов на $\mathbf{R}^n$.

Доказательство. Пусть $l: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — линейный функционал, задаваемый в координатах $(x_1, \ldots, x_n)$ строкой $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$, т. е. $l(x)=\xi x=\xi_1 x_1+\ldots+\xi_n x_n$. Тогда в координатах $y=C^{-1}x$ тот же функционал l имеет вид

$$l_C(y)=l(x)=\xi\cdot Cy=C^t\xi\cdot y=\eta\cdot y, \tag{2.16}$$

т. е. он задается строкой $\eta=C^t\xi$. Но тогда из (2.15) вытекает, что

$$\tilde{P}_C(\eta)=\tilde{P}_C(C^t\xi)=\tilde{P}(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}^n, \tag{2.17}$$

т. е. значения $\tilde{P}_C$ и $\tilde{P}$ совпадают на одном и том же функционале $l \in \mathbf{R}^{n*}$.

2.3. Методы вычисления преобразования Фурье. Формула (1.2) пригодна для вычисления преобразования Фурье широкого класса обобщенных функций, а не только для $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$.

Лемма 2.1. Если $u(x) \in L_1(\mathbf{R}^n)$, то $u(x) \in S'(\mathbf{R}^n)$ и $\tilde{u}(\xi) \in C_b(\mathbf{R}^n)$, причем (ср. с (1.2))

$$\begin{gathered}(Fu)(\xi)=\tilde{u}(\xi)=\int e^{ix\xi}u(x)\,dx, \quad \xi \in \mathbf{R}^n;\\ \max_{\xi \in \mathbf{R}^n}|\tilde{u}(\xi)| \leqslant \int |u(x)|\,dx.\end{gathered} \tag{2.18}$$

Доказательство. Из определения 2.1 и (1.2), для $\forall \varphi \in S(\mathbf{R}^n)$, по теореме Фубини,

$$\langle \tilde{u}, \varphi \rangle = \int u(x)\left(\int e^{ix\xi}\varphi(\xi)\,d\xi\right)dx=\int\left(\int e^{ix\xi}u(x)\,dx\right)\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Отсюда получаем (2.18) и, следовательно, $\tilde{u} \in C_b(\mathbf{R}^n)$.

Следствие 2.4. Если $u(x) \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$, и при некотором $N=1, 2, \ldots$ удовлетворяет оценке

$$\int \frac{|u(x)|}{(1+|x|^2)^N}\,dx < \infty, \tag{2.18'}$$

то $u(x) \in S'(\mathbf{R}^n)$, и

$$Fu=\tilde{u}(\xi)=(1-\Delta_\xi)^N\int e^{ix\xi}\frac{u(x)}{(1+|x|^2)^N}dx, \qquad (2.18'')$$

как вытекает из второй формулы в (2.4), причем производные понимаются в смысле обобщенных функций.

Пример 2.2. Если $u(x)\in L_2(\mathbf{R})$, то $\frac{u(x)}{x+i}\in L_1(\mathbf{R})$ по неравенству Коши — Буняковского. Поэтому, аналогично (2.18″),

$$\tilde{u}(\xi)=\left(-i\frac{d}{d\xi}+i\right)\int e^{ix\xi}\frac{u(x)}{x+i}dx, \quad \xi\in\mathbf{R}, \qquad (2.18'')$$

(ср. [68]).

Лемма 2.2 ([55]). Если $u(x)\in\xi'(\mathbf{R}^n)$, то $\tilde{u}(\xi)\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, причем

$$\tilde{u}(\xi)=\langle u(x), e^{ix\xi}\rangle, \quad \xi\in\mathbf{R}^n, \qquad (2.19)$$

где скалярное произведение понимается в смысле формулы (1.40) главы 1.

Пример 2.3.

$$F(\delta^{(\alpha)}(x))(\xi)=\langle\delta^{(\alpha)}(x), e^{ix\xi}\rangle=(-i\xi)^\alpha;$$
$$F(\delta(x-h))(\xi)=\langle\delta(x-h), e^{ix\xi}\rangle=e^{ih\xi}. \qquad (2.19')$$

2.4. Примеры вычисления преобразований Фурье.

1) Для гауссова одномерного распределения с дисперсией $\sigma>0$

$$F\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma}}}{\sqrt{2\pi\sigma}}=\int\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma}+ix\xi}}{\sqrt{2\pi\sigma}}dx=\int\frac{e^{-\frac{(x-i\sigma\xi)^2}{2\sigma}-\frac{\sigma\xi^2}{2}}}{\sqrt{2\pi\sigma}}dx=e^{-\frac{\sigma\xi^2}{2}}. \qquad (2.20)$$

2) Замыкая контур интегрирования вверх (в область $\operatorname{Im}x>0$) при $\xi>0$ и вниз (в область $\operatorname{Im}x<0$) при $\xi<0$, по теореме Коши о вычетах, получаем для $a\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$, как в (2.18″),

$$F\frac{1}{x-a}=\begin{cases}2\pi i\theta(\xi)e^{ia\xi} & \text{при } \operatorname{Im}\xi>0,\\ -2\pi i\theta(-\xi)e^{ia\xi} & \text{при } \operatorname{Im}\xi<0.\end{cases} \qquad (2.21)$$

3) Отсюда для распределения Коши $\frac{1}{1+x^2}$

$$F\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2i}F\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right)=$$
$$=\pi\theta(\xi)e^{-\xi}+\pi\theta(-\xi)e^{\xi}=\pi e^{-|\xi|}. \qquad (2.22)$$

4) Для $\operatorname{Re}\lambda>0$

$$F(\theta(x)e^{-\lambda x})=\int_0^\infty e^{-(\lambda-i\xi)x}dx=i\frac{1}{\xi+i\lambda}. \qquad (2.23)$$

и, аналогично,

$$F(\theta(-x)e^{\lambda x})=-i\frac{1}{\xi-i\lambda}. \qquad (2.23')$$

5) Отсюда, в силу непрерывности преобразования Фурье, получаем при $\lambda \to 0+$:

$$F(\theta(x))(\xi) = i\frac{1}{\xi + i0},$$

и аналогично,

$$F(\theta(-x))(\xi) = -i\frac{1}{\xi - i0}. \tag{2.24}$$

6) Складывая эти равенства, получаем *формулу* «скачка» *Сохоцкого — Племеля*:

$$F(1)(\xi) = 2\pi\delta(x) = i\left(\frac{1}{\xi + i0} - \frac{1}{\xi - i0}\right). \tag{2.25}$$

7) Из (2.23), в силу (2.4), получаем для $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $k = 0, 1, \ldots$

$$F(\theta(x)x^k e^{-\lambda x})(\xi) = \left(-i\frac{d}{d\xi}\right)^k \frac{1}{i}\frac{1}{\xi + i\lambda} = \frac{i^{k-1}k!}{(\xi + i\lambda)^{k+1}} \tag{2.26}$$

и, аналогично, из (2.23′) получаем

$$F(\theta(-x)x^k e^{\lambda x})(\xi) = -\frac{i^{k+1}k!}{(\xi - i\lambda)^{k+1}}. \tag{2.27}$$

§ 3. Соболевские пространства функций

Определение 3.1 ([2], [15], [55], [67]). Для $s \in \mathbf{R}$ через $H_s = H_s(\mathbf{R}^n)$ обозначается пространство обобщенных функций $u(x) \in S'(\mathbf{R}^n)$, у которых $\tilde{u}(\xi) \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ и

$$\|u\|_s^2 = \int (1 + |\xi|)^{2s} |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty. \tag{3.1}$$

Пример 3.1. $\delta(x) \in H_s(\mathbf{R}^n)$ при $< -n/2$, поскольку $\tilde{\delta}(\xi) \equiv 1$.

Пространство H_s — полное гильбертово пространство, поскольку отображение $u(x) \mapsto (1 + |\xi|)^s \tilde{u}(\xi)$ является изометрией $H_s(\mathbf{R}^n)$ на $L_2(\mathbf{R}^n)$. Очевидно, $H_{s_1}(\mathbf{R}^n) \subset H_{s_2}(\mathbf{R}^n)$ — непрерывное вложение при $s_1 \geqslant s_2$. Если $s = l = 0, 1, 2, \ldots$, то $(u(x) \in H_s) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\partial_x^\alpha u(x) \in L_2(\mathbf{R}^n)$ при $|\alpha| \leqslant m)$, и метрика (3.1) эквивалентна метрике (см. [2], [15])

$$|||u|||_l^2 = \sum_{|\alpha| \leqslant l} \int_{\mathbf{R}^n} |\partial_x^\alpha u(x)|^2 dx. \tag{3.2}$$

Это вытекает из теоремы 2.1, ввиду (2.4). Легко показать, что $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ всюду плотно в $H_s(\mathbf{R}^n)$ при $s \in \mathbf{R}$ (см. [55]).

Предложение 3.1. При $s \in \mathbf{R}$ оператор P вида (0.1) непрерывно действует из $H_s(\mathbf{R}^n)$ в $H_{s-m}(\mathbf{R}^n)$.

Доказательство. Для $u \in H_s(\mathbf{R}^n)$, ввиду (2.5),

$$\|Pu\|_{s-m}^2 = \int (1 + |\xi|)^{2(s-m)} |\widetilde{Pu}(\xi)|^2 d\xi =$$
$$= \int (1 + |\xi|)^{2(s-m)} |\tilde{P}(\xi)|^2 |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi \leqslant$$
$$\leqslant C \int (1 + |\xi|)^{2s} |\tilde{u}(\xi)|^2 = C\|u\|_s^2.$$

§ 4. Преобразование Фурье быстрорастущих обобщенных функций

4.1. Функционалы на пространстве $Z(\mathbf{C}^n)$.

Определение 4.1. Через $Z'=Z'(\mathbf{C}^n)$ обозначается пространство линейных непрерывных функционалов на $Z(\mathbf{C}^n)$ (см. определение 1.1).

Например, если $w(\xi)\in S'(\mathbf{R}^n)$, то скалярное произведение $\langle w(\xi), \varphi|_{\mathbf{R}^n}\rangle$ определено при $\varphi\in Z(\mathbf{C}^n)$, поскольку $\varphi|_{\mathbf{R}^n}\in S(\mathbf{R}^n)$, ввиду оценок (1.7). Положим

$$\langle v(z), \varphi(z)\rangle = \langle w(\xi), \varphi|_{\mathbf{R}^n}\rangle, \quad \varphi\in Z(\mathbf{C}^n). \tag{4.1}$$

Тогда $v(z)\in Z'(\mathbf{C}^n)$, поскольку отображение $\varphi\mapsto\varphi|_{\mathbf{R}^n}$ является непрерывным вложением $Z(\mathbf{C}^n)\subset S(\mathbf{R}^n)$. Кроме того, $Z(\mathbf{C}^n)$ всюду плотно в $S(\mathbf{R}^n)$, поскольку $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ всюду плотно в $S(\mathbf{R}^n)$, а $F: S(\mathbf{R}^n)\to S(\mathbf{R}^n)$ — изоморфизм, согласно предложению 1.1, и $F:\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)\to Z(\mathbf{C}^n)$ — изоморфизм по теореме 1.1′. Следовательно, двойственное отображение $S'(\mathbf{R}^n)\to Z'(\mathbf{C}^n)$, переводящее w в v по формуле (4.1), также является вложением. Итак, $S'(\mathbf{R}^n)$ является подмножеством в $Z'(\mathbf{C}^n)$.

Построим примеры более общих функционалов из $Z'(\mathbf{C}^n)$. Возьмем $w(\xi, \eta)\in S'(\mathbf{R}^{2n})$, где $\mathbf{R}^{2n}$ — овеществление комплексного пространства $\mathbf{C}^n$. Предположим, что при некотором $B\geqslant 0$

$$\operatorname{supp} w\subset T_B,$$

где

$$T_B=\{z=\xi+i\eta\in\mathbf{C}^n : |\eta|\leqslant B\}, \ \xi, \eta\in\mathbf{R}^n. \tag{4.2}$$

Возьмем срезающую функцию

$$\zeta_B(\eta)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n),\ \zeta_B(\eta)=1 \text{ при } |\eta|\leqslant B,\ \zeta_B(\eta)=0 \text{ при } |\eta|\geqslant B+1. \tag{4.3}$$

Тогда из оценок (1.7) вытекает, что $\zeta_B(\eta)\varphi(\xi+i\eta)\in S(\mathbf{R}^{2n})$ при $\varphi\in Z(\mathbf{C}^n)$. Определим скалярное произведение

$$\langle w(\xi, \eta), \varphi(\xi+i\eta)\rangle=\langle w(\xi, \eta), \zeta_B(\eta)\varphi(\xi+i\eta)\rangle, \ \varphi\in Z(\mathbf{C}^n), \tag{4.4}$$

где $\langle\cdot, \cdot\rangle$ в правой части — двойственность между $S'(\mathbf{R}^{2n})$ и $S(\mathbf{R}^{2n})$.

Функционал (4.4) не зависит от выбора функции ζ_B со свойствами (4.3) и, ввиду определения 1.1, он непрерывен на пространстве $Z(\mathbf{C}^n)$.

Определение 4.2. Функционал $v(z)\in Z'(\mathbf{C}^n)$ имеет локальную плотность $w(\xi, \eta)$ на множестве T_B, если он допускает представление

$$\langle v(z), \varphi(z)\rangle=\langle w(\xi, \eta), \varphi(\xi+i\eta)\rangle, \ \varphi\in Z(\mathbf{C}^n), \tag{4.5}$$

где $w(\xi, \eta)\in S'(\mathbf{R}^{2n})$ и $\operatorname{supp} w\subset T_B$.

Пример 4.1. $\langle\delta_{2n}(\xi,\eta),\ \varphi(\xi+i\eta)\rangle=\varphi(0)$, $\langle\delta_n(\eta),\ \varphi(\xi+i\eta)\rangle=\int\limits_{\mathbf{R}^n}\varphi(\xi)d\xi$.

Отметим, что функционал (4.1) также имеет локальную плотность $w(\xi,\eta)=w(\xi)\times\delta_n(\eta)$.

4.2. Преобразование Фурье на пространстве $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$.

Предложение 4.1. Оператор $F:S'(\mathbf{R}^n)\to S'(\mathbf{R}^n)$, определенный тождеством (2.1), допускает продолжение до непрерывного отображения $F:\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)\to Z'(\mathbf{C}^n)$, так что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S'(\mathbf{R}^n) & \xrightarrow{F} & S'(\mathbf{R}^n) \\ \cap & & \cap \\ \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) & \xrightarrow{F} & Z'(\mathbf{R}^n) \end{array}$$

становится коммутативной. Здесь вложение $S'\subset Z'$ определяется по формуле (4.1).

Доказательство. Из определения (2.1) следует, что для $u\in S'$

$$\langle\tilde{u}(\xi),\varphi(\xi)\rangle=\langle u(x),\tilde{\varphi}(x)\rangle,\quad \varphi\in Z(\mathbf{C}^n). \tag{4.6}$$

Отсюда, замыканием по непрерывности, получаем

Определение 4.3. Для $u\in\mathcal{D}'$ определим $\tilde{u}$ тождеством (4.6).

Остается заметить, что отображение $F:\varphi\mapsto\tilde{\varphi}$ непрерывно действует из $Z(\mathbf{C}^n)$ в $\mathcal{D}(\mathbf{C}^n)$, также как и оператор F^{-1} (см. теорему 1.1′).

Из определения (4.6) вытекает, в силу теоремы 1.1′

Предложение 4.1′. Оператор $F:\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)\to Z'(\mathbf{C}^n)$ непрерывен и $F^{-1}:Z'(\mathbf{C}^n)\to\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ — также непрерывен.

4.3. Операции на пространстве $Z'(\mathbf{C}^n)$. Поскольку $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ плотно в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, а $F:\mathcal{D}'\to Z'$ — изоморфизм, то $Z=F(\mathcal{D})$ плотно в Z'. На Z определены операции дифференцирования, умножения на многочлен и на экспоненту e^{iaz}, где $a\in\mathbf{R}^n$, линейные вещественные замены координат и сдвиг на любой комплексный вектор. Все эти операции продолжаются по непрерывности на $v\in Z'$ следующими тождествами: для $\varphi\in Z(\mathbf{C}^n)$

$$\begin{gathered}\langle\partial_z^\alpha v(z),\varphi(z)\rangle=\langle v(z),(-\partial_z)^\alpha\varphi(z)\rangle\quad\forall\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),\\ \langle z^\alpha v(z),\varphi(z)\rangle=\langle v(z),z^\alpha\varphi(z)\rangle,\\ \langle e^{iaz}v(z),\varphi(z)\rangle=\langle v(z),e^{iaz}\varphi(z)\rangle,\quad a\in\mathbf{R}^n,\\ \langle v(z+a),\varphi(z)\rangle=\langle v(\zeta),\varphi(\zeta-a)\rangle,\quad a\in\mathbf{C}^n,\\ \langle v(Cz),\varphi(z)\rangle=\langle v(\zeta),\frac{1}{|\det C|}\varphi(C^{-1}\zeta)\rangle,\quad C\in\mathrm{GL}_{\mathbf{R}}(n).\end{gathered} \tag{4.7}$$

4.4. Свойства преобразования Фурье. Для $u\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, замыканием по непрерывности, получаем из (2.4), (2.5), (2.8) тождества

$$F(\partial_x^\alpha u)=(-iz)^\alpha\tilde{u}(z),\quad F(x^\alpha u)=(-i\partial_z)^\alpha\tilde{u}(z)\ \forall\alpha,$$

$$F(P(\partial_x)u) = \tilde{P}(z)\tilde{u}(z),$$
$$F(u(x+a)) = e^{-iaz}\tilde{u}(z), \quad a \in \mathbf{R}^n, \tag{4.8}$$
$$F(e^{iax}u(x)) = \tilde{u}(z+a), \quad a \in \mathbf{C}^n.$$

Отметим, что последнее тождество справедливо при всех $a \in \mathbf{C}^n$ для $u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ (как и для $u \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$), в отличие от второй формулы в (2.8).

4.5. Аналитические функционалы. Так называются функционалы $v(z) \in Z'$, имеющие аналитическую локальную плотность [18]. Точнее, пусть $f(z)$ — голоморфная функция от $z \in T_\Omega$, где Ω — связная область в $\mathbf{R}^n$, а

$$T_\Omega = \{z = \xi + i\eta \in \mathbf{C}^n : \eta = \operatorname{Im} z \in \Omega\} \tag{4.9}$$

— трубчатая область в $\mathbf{C}^n$ с основанием Ω. Предположим, что при $\forall B > 0$ при некоторых $C = C_B$ и $\mu = \mu_B$

$$|f(z)| \leqslant C(1+|z|)^\mu \text{ при } z \in T_\Omega, \ |\operatorname{Im} z| \leqslant B. \tag{4.10}$$

Тогда можно определить *аналитический функционал* (см. [18])

$$\langle f|_{T_\Omega}, \varphi \rangle = \int\limits_{\operatorname{Im} z = \eta} f(z)\varphi(z)\,dz, \quad \varphi \in Z; \quad \eta \in \Omega. \tag{4.11}$$

Этот функционал не зависит от выбора $\eta \in \Omega$, что легко выводится из теоремы Коши, связности области Ω и оценок (4.10), (1.7). Отметим, что область Ω и (T_Ω) можно считать выпуклой по теореме Бохнера ([12], [50], [53]).

Пример 4.2. Пусть $n=1$, $f(z) = \frac{1}{z}$, $T_\Omega = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Тогда

$$\left\langle \frac{1}{z}\Big|_{\operatorname{Im} z > 0}, \varphi \right\rangle = \int\limits_{\operatorname{Im} z = \varepsilon} \frac{\varphi(z)}{z}\,dz, \quad \varepsilon > 0. \tag{4.11'}$$

В области $\operatorname{Im} z < 0$ функция $\frac{1}{z}$ задает другой функционал, причем, по теореме Коши (ср. с (2.25)),

$$\frac{1}{z}\Big|_{\operatorname{Im} z < 0} - \frac{1}{z}\Big|_{\operatorname{Im} z > 0} = 2\pi i\delta(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}. \tag{4.11''}$$

Предложение 4.2. Если $v \in Z'(\mathbf{C}^n)$ является аналитическим функционалом: $v = f|_{T_\Omega}$, то функция $f(z)$ при $z \in T_\Omega$ определяется по v однозначно.

Это вытекает из плотности пространства функций $\{\tilde{\varphi}(\xi + i\eta) : \tilde{\varphi} \in Z\}$ в $S(\mathbf{R}^n)$ при $\eta \in \mathbf{R}^n$.

Предложение 4.3. Любой функционал вида (4.5) (т. е. имеющий локальную плотность) представим в виде конечной суммы (не более, чем 2^n) аналитических функционалов вида (4.11).

Доказательство. В одномерном случае для любой непрерывной функции $w(\xi)$, удовлетворяющей оценке $|w(\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^{\mu}$ при $\xi \in \mathbf{R}$,

$$\langle w(\xi) \times \delta(\eta), \varphi(\xi+i\eta) \rangle = \int\limits_{\mathbf{R}} w(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\operatorname{Im} z=-1} f(z)\varphi(z)\,dz - \int\limits_{\operatorname{Im} z=1} f(z)\varphi(z)\,dz \right), \qquad (4.12)$$

где

$$f(z) = \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{w(\xi)(2i)^{\mu+1}d\xi}{(z-\xi)(z-\xi+2i)^{\mu+1}}. \qquad (4.13)$$

Действительно, (4.12), (4.13) вытекают из представления

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\operatorname{Im} z=-1} \frac{\varphi(z)(2i)^{\mu+1}dz}{(z-\xi)(z-\xi+2i)^{\mu+1}} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\operatorname{Im} z=1} \frac{\varphi(z)(2i)^{\mu+1}dz}{(z-\xi)(z-\xi+2i)^{\mu+1}} \right). \qquad (4.14)$$

Аналогичная конструкция годится и для общего n-мерного случая и любого функционала вида (4.5).

§ 5. Теория Пэли — Винера

5.1. Преобразование Фурье финитных обобщенных функций. Заметим, что преобразование Фурье от (финитных) обобщенных функций $\delta(x)$, $\delta^{(\alpha)}(x) \in \mathscr{E}'$ является многочленами (см. (2.2), (2.19')). Оказывается, что, аналогично, для любого распределения $u(x) \in \mathscr{E}'$ его преобразование Фурье $\tilde{u}(\xi)$ — целая функция на $\mathbf{C}^n$. Следующая теорема уточняет лемму 2.2.

Теорема 5.1 ([12], [55], [65]). Если $u(x)\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$, то $\tilde{u}(\xi) \in C^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ и продолжается с $\mathbf{R}^n$ до целой функции от $z \in \mathbf{C}^n$, равной (ср. с (2.19))

$$\tilde{u}(z) = \langle u(x), e^{ixz} \rangle, \quad z \in \mathbf{C}^n. \qquad (5.1)$$

При некоторых C, A, $\mu \geqslant 0$ выполняется оценка

$$|\tilde{u}(z)| \leqslant Ce^{A|\operatorname{Im} z|}(1+|z|)^{\mu}, \quad z \in \mathbf{C}^n. \qquad (5.1')$$

Обратно, если $\tilde{u}(z)$ — произвольная целая функция в $\mathbf{C}^n$, удовлетворяющая оценке (5.1') при некоторых C, A и μ, то $\tilde{u}(z)|_{\mathbf{R}^n} = \tilde{u}(\xi) \in S'(\mathbf{R}^n)$ и $u \equiv F^{-1}\tilde{u} \in \mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$, причем $u(x) = 0$ при $|x| > A$.

Следствие 5.1. $\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n) \subset H_{-\infty}(\mathbf{R}^n) = \bigcup_{s \in \mathbf{R}} H_s(\mathbf{R}^n)$, т. к. из (5.1') при $\operatorname{Im} z = 0$ видно, что $|\tilde{u}(\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^{\mu}$, $\xi \in \mathbf{R}^n$, откуда $u(x) \in H_s(\mathbf{R}^n)$ при $s < -\mu - n/2$.

5.2. Умеренные распределения с носителем в конусе. Пусть K — замкнутый конус в $\mathbf{R}^n$ с вершиной в нуле, не содержащий прямых. По определению, $K+K\subset K$ и $tK\subset K$ при $t>0$, так что K — выпуклое множество. Например, $K=\bar{\mathbf{R}}_+=\{x\in\mathbf{R}: x\geqslant 0\}$. Обозначим через K^* — *двойственный конус*:

$$K^*=\{\eta\in\mathbf{R}^n: \eta x>0 \text{ при } x\in K\setminus 0\}. \tag{5.2}$$

Очевидно, K^* — открытое множество, и $K^*\neq\varnothing$ тогда и только тогда, когда K не содержит прямых.

Выберем срезающую функцию $\psi(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ так, чтобы

$$\psi(x)=\begin{cases}1 \text{ при } x\in K,\\ 0 \text{ при } \rho(x, K)\geqslant 1;\end{cases} \quad \sup_{x\in\mathbf{R}^n}|\psi^{(\alpha)}(x)|<\infty \quad \forall\alpha. \tag{5.3}$$

Тогда, очевидно,

$$\psi(x)\,e^{ixz}\in S(\mathbf{R}^n) \text{ при } \operatorname{Im} z\in K^*. \tag{5.4}$$

Для $u\in S'_K\equiv\{u\in S'(\mathbf{R}^n): \operatorname{supp} u\subset K\}$ определим скалярное произведение

$$\langle u, e^{ixz}\rangle=\langle u, \psi(x)\,e^{ixz}\rangle,\quad \operatorname{Im} z\in K^*. \tag{5.5}$$

Это произведение не зависит от выбора функции $\psi(x)$ со свойствами (5.3)

Теорема 5.2 ([12], [28], [55], [62]). Если $u\in S'_K$, то $\tilde{u}(\xi)\in S'(\mathbf{R}^n)$ продолжается в смысле определения 1.12 главы 1 до аналитической функции $\tilde{u}(z)$ в трубчатой области $T_{K^*}=\{z\in\mathbf{C}^n: \operatorname{Im} z\in K^*\}$ (см. 4.9)), причем

$$\tilde{u}(z)=\langle u(x), e^{ixz}\rangle,\quad z\in T_{K^*}, \tag{5.6}$$

где скалярное произведение понимается как в (5.5).

Выполняется оценка: при некоторых C, μ, ν (ср. с формулами (1.60), (1.73) главы 1):

$$|\tilde{u}(z)|\leqslant C\frac{(1+|z|)^\mu}{\rho^\nu},\ \text{где } \rho=\rho(z, \partial T_{K^*})=\rho(\operatorname{Im} z, \partial K^*). \tag{5.6'}$$

Обратно, если $\tilde{u}(z)$ — произвольная голоморфная функция в T_{K^*}, удовлетворяющая оценкам (5.6′), то $\tilde{u}|_{\mathbf{R}^n}\in S'$ и $\tilde{u}$ допускает единственное представление вида (5.6), где $u=F^{-1}(\tilde{u}|_{\mathbf{R}^n})\in S'_K$.

Определение 5.1 ([12], [55]) (ср. с определением 1.10). Через $S'_{(K)}$ обозначим пространство $u(x)\in S'(\mathbf{R}^n)$, для которых $\operatorname{supp} u(x+a)\subset K$ при некотором $a\in\mathbf{R}^n$.

Из теоремы 5.2 очевидно, следует, ввиду первой формулы в (2.8):

Теорема 5.2′. Если $u(x)\in S'_{(K)}$, то $\tilde{u}(\xi)$ аналитически продолжается в область T_{K^*}. Если $\operatorname{supp} u(x+a)\subset K$, где $a\in\mathbf{R}^n$, то

$$\tilde{u}(z)=\langle u(x), \psi(x-a)\,e^{ixz}\rangle,\quad z\in T_{K^*}. \tag{5.7}$$

Выполняется оценка: при некоторых C, μ, ν, $A>0$

$$|\tilde{u}(z)|\leqslant C\frac{(1+|z|)^{\mu}}{\rho^{\nu}}e^{A|\operatorname{Im} z|},\quad z\in T_{K^*}. \tag{5.7'}$$

Обратно, если $\tilde{u}(z)$ — произвольная голоморфная функция в T_{K^*}, удовлетворяющая оценке (5.7′), то $\tilde{u}(z)|_{\mathbf{R}^n}\in S'$, и $\tilde{u}(z)$ допускает единственное представление вида (5.7), где $u=F^{-1}(\tilde{u}(z)|_{\mathbf{R}^n})\in S'_{(K)}$.

5.3. Экспоненциально растущие распределения с носителем в конусе. Пусть K — выпуклый замкнутый конус в $\mathbf{R}^n$, как и выше, не содержащий прямых.

Распределение $u(x)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ назовем *экспоненциально растущим*, если при некотором $B>0$

$$e^{-B\cdot M(x)}u(x)\in S'(\mathbf{R}^n),$$

где

$$M(x)=\sqrt{1+|x|^2}. \tag{5.8}$$

Определение 5.2. $\mathscr{D}'E(\mathbf{R}^n)$ — множество всех экспоненциально растущих распределений $u(x)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, $\mathscr{D}'E_k=\mathscr{D}'E(\mathbf{R}^n)\cap\mathscr{D}'_K$.

Обозначим для $R>0$

$$K_R^*=\{\eta\in K^*:\rho(\eta,\partial K^*)>R\}. \tag{5.9}$$

Очевидно, для достаточно большого $R=R(B)>0$

$$\psi(x)e^{ixz}e^{B\cdot M(x)}\in S(\mathbf{R}^n)\text{ при }\operatorname{Im} z\in K_R^*. \tag{5.9'}$$

Поэтому для такого R при $\operatorname{Im} z\in K_R^*$ имеет смысл скалярное произведение

$$f(z)=\langle u(x),\psi(x)e^{ixz}\rangle\equiv$$
$$\equiv\langle e^{-B\cdot M(x)}u(x),\psi(x)e^{ixz}e^{B\cdot M(x)}\rangle. \tag{5.10}$$

Теорема 5.3. Если экспоненциально растущее распределение $u\in\mathscr{D}'_K$, то $\tilde{u}=Fu\in Z'$ является аналитическим функционалом вида (4.11) в области $\Omega=T_{K_R^*}$ для достаточно большого $R>0$, где $f(z)$ голоморфна в $T_{K_R^*}$ и определяется формулой (5.10). Выполняется оценка вида (5.6′): при некоторых C, μ

$$|f(z)|\leqslant C(1+|z|)^{\mu},\quad\operatorname{Im} z\in K_R^*. \tag{5.11}$$

Обратно, если $f(z)$ — произвольная голоморфная функция в $T_{K_R^*}$, удовлетворяющая оценке (5.11) при некоторых C, μ, то аналитический функционал $f|_{T_{K_R^*}}$ является преобразованием

Фурье от некоторого экспоненциально растущего распределения $u \in \mathcal{D}'E_K$.

Эта теорема доказывается почти дословно так же, как теорема 5.2. Более того, ее можно вывести из теоремы 5.2, поскольку $u_\eta(x) \equiv e^{-x\eta} u(x) \in S'_K$ при $\eta \in K^*_R$ ввиду (5.9′) и $\tilde{u}_\eta(z) = \tilde{f}(z + i\eta)$ — голоморфная функция в T_{K^*}, непрерывная в $\bar{T}_{K^*}$.

Следствие 5.2. Преобразование Фурье любого экспоненциально растущего распределения имеет локальную плотность в смысле определения 4.2 и обратное также верно.

Прямое утверждение выводится из теоремы 5.3 при помощи разбиения экспоненциально растущего распределения в сумму слагаемых с носителями в выпуклых конусах, не содержащих прямых. Обратное утверждение очевидно для аналитических функционалов вида (4.11), поскольку они являются преобразованиями Фурье от произведения экспоненты вида $e^{\eta x}$ на умеренное распределение из $S'(\mathbf{R}^n)$. Остается заметить, что, в силу предложения 4.3, любой функционал, имеющий локальную плотность, равен конечной сумме аналитических функционалов вида (4.11).

Определение 5.3. Через $\mathcal{D}'E_{(K)}$ обозначим пространство $u(x) \in \mathcal{D}'E(\mathbf{R}^n)$, для которых $\operatorname{supp} u(x+a) \subset K$ при некотором $a \in \mathbf{R}^n$. Последовательность $u_k \xrightarrow{\mathcal{D}'E_{(K)}} u$, если $e^{-B \cdot M(x)} u_k(x-a) \xrightarrow{S'_K} e^{-B \cdot M(x)} u(x-a)$ при некоторых $B > 0$ и $a \in \mathbf{R}^n$, не зависящих от k (сходимость в S'_K по определению совпадает со слабой сходимостью в $S'(\mathbf{R}^n)$).

Из теоремы 5.3 очевидно следует, ввиду первой формулы в (2.8):

Теорема 5.3′. Если $u(x) \in \mathcal{D}'E_{(K)}$, то $\tilde{u} \equiv Fu$ — аналитический функционал в области $T_{K^*_R}$ для достаточно большого $R > 0$ с локальной плотностью вида (5.10), удовлетворяющей оценке

$$|f(z)| \leqslant C(1 + |z|)^\mu e^{A|\operatorname{Im} z|}, \quad z \in T_{K^*_R} \tag{5.12}$$

при некоторых C, μ, $A > 0$. Обратное также верно.

Например, для $u(x) = \theta(x+a) e^{3x}$, согласно (5.10), локальная плотность равна

$$f(z) = \int_{-a}^{\infty} e^{izx} e^{3x} dx = -\frac{e^{-a(iz+3)}}{iz+3} \text{ при } \operatorname{Im} z > 3. \tag{5.13}$$

§ 6. Свертка и преобразование Фурье

Согласно (1.5), для $u, v \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$

$$F(u * v)(\xi) = \tilde{u}(\xi)\tilde{v}(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}^n. \tag{6.1}$$

Теорема 6.1. Если $u(x)\in\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$, а $v(x)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, то

$$F(u*v)=\tilde{u}(z)\tilde{v}, \tag{6.2}$$

где $\tilde{u}(z)$ — голоморфная функция (5.1), а $\tilde{v}\equiv Fv\in Z'(\mathbf{C}^n)$.

Для доказательства нужно аппроксимировать u и v функциями из $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, использовать (6.1) и непрерывность всех операций в (6.2) (свертки на $\mathscr{E}'\times\mathscr{D}'$, преобразования Фурье и умножения в правой части).

Пусть K — замкнутый выпуклый конус в $\mathbf{R}^n$, не содержащий прямых, как и выше.

Теорема 6.2. Если u, $v\in\mathscr{D}'E_{(K)}$, то при достаточно большом $R>0$

$$F(u*v)(z)=\tilde{u}(z)\tilde{v}(z), \quad z\in T_{K_R^*}. \tag{6.3}$$

Здесь $\tilde{u}(z)$ и $\tilde{v}(z)$ — аналитические функции, задающие функционалы $\tilde{u}$, $\tilde{v}\in Z'$ в области $T_{K_R^*}$ по формуле вида (4.11), и левая часть (6.3) — аналитическая локальная плотность функционала $F(u*v)\in Z'$ в области $T_{K_R^*}$.

Для доказательства можно аппроксимировать u и v функциями из $\mathscr{E}'$ вида $u_\varepsilon(x)=\psi(\varepsilon x)u(x)$, $v_\varepsilon(x)=\psi(\varepsilon x)v(x)$, где $\psi(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ и $\psi(x)=1$ при $|x|<1$. Тогда при $\varepsilon\to 0$, очевидно,

$$\left(u_\varepsilon\xrightarrow{\mathscr{D}'E_{(K)}}u,\quad v_\varepsilon\xrightarrow{\mathscr{D}'E_{(K)}}v\right)\Rightarrow\left(u_\varepsilon*v_\varepsilon\xrightarrow{\mathscr{D}'_K}u*v\right) \tag{6.4}$$

и, кроме того, из (5.10) видно, что при $\varepsilon\to 0$

$$\tilde{u}_\varepsilon(z)\to\tilde{u}(z), \quad \tilde{v}_\varepsilon(z)\to\tilde{v}(z) \quad \text{при} \quad z\in T_{K_R^*} \tag{6.5}$$

для достаточно большого $R>0$. Наконец, функции $\tilde{u}_\varepsilon(z)$, $\tilde{v}_\varepsilon(z)$ допускают равномерные по ε оценки вида (5.12). Поэтому, применяя к u_ε, v_ε формулу (6.2), мы при $\varepsilon\to 0$ получаем (6.3).

Глава 3

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ГЛАДКОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Проблема деления

1.1. Проблема деления в классах быстрорастущих распределений. Рассмотрим уравнение (0.1) при $f(x)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$. Решение $u(x)$ также будем искать в классе $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$. Применим к обеим частям (0.1) преобразование Фурье. Тогда, в силу формулы (4.8) главы 2, получаем «алгебраическое» уравнение

$$\tilde{P}(z)\,\tilde{u}(z)=\tilde{f}(z), \tag{1.1}$$

где равенство понимается как равенство функционалов из $Z'(\mathbf{C}^n)$.

Теорема 1.1 ([46], [58]). Уравнение (1.1) имеет решение $\tilde{u}\in Z'(\mathbf{C}^n)$ при $\forall f\in Z'(\mathbf{C}^n)$, если $\tilde{P}(\xi)\not\equiv 0$.

Следствие 1.1. Уравнение (1.1) имеет решение $u(x)\in\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ при всех $f\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, если $P\not\equiv 0$.

Отсюда при $f=\delta(x)$ вытекает теорема 2.1 главы 1.

Для доказательства теоремы 1.1 можно применить теорему Хана—Банаха о продолжении линейных непрерывных функционалов в локально выпуклых пространствах [72]. А именно, (1.1) эквивалентно тому, что

$$\langle\, \tilde{u}(\xi), \tilde{P}(\xi)\,\psi(\xi)\,\rangle = \langle\, \tilde{f}(\xi), \psi(\xi)\,\rangle, \quad \psi\in Z(\mathbf{C}^n). \tag{1.2}$$

Таким образом, искомый функционал $\tilde{u}$ известен на пространстве основных функций вида $\tilde{P}(\xi)\,\psi(\xi)$, где $\psi\in Z(\mathbf{C}^n)$. Обозначим это пространство через $\tilde{P}Z$. Для окончания доказательства теоремы 1.1 остается лишь проверить, что $\tilde{u}$ продолжается с $\tilde{P}Z$ до линейного непрерывного функционала на Z. Выведем это из теоремы Хана—Банаха. Для этого нужно лишь доказать непрерывность функционала $\tilde{u}$ на пространстве $\tilde{P}Z$ с топологией, индуцированной вложением $\tilde{P}Z\subset Z$.

Лемма 1.1. Если $\varphi(z)=\tilde{P}(z)\,\psi(z)$, где $\psi\in Z(\mathbf{C}^n)$, и

$$|\varphi(z)|\leqslant\frac{C_N(\varphi)}{(1+|z|)^N}\,e^{A|\operatorname{Im} z|} \quad \text{при} \quad z\in\mathbf{C}^n, \tag{1.3}$$

то также

$$|\psi(z)|\leqslant\frac{\tilde{C}_N(\psi)}{(1+|z|)^N}\,e^{A|\operatorname{Im} z|} \quad \text{при} \quad z\in\mathbf{C}^n, \tag{1.4}$$

причем

$$\tilde{C}_N(\psi)\leqslant B_N C_N(\varphi), \tag{1.5}$$

где B_N не зависит от φ (и от A).

Эта лемма доказывается методом [12], [28], [46]. А именно, по теореме Коши,

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_z}\frac{\psi(z+\lambda e)\,d\lambda}{\lambda}, \tag{1.6}$$

где γ_z—любой положительно ориентированный контур в комплексной плоскости, охватывающий точку $\lambda=0$, а $e\in\mathbf{C}^n\setminus 0$. Выберем вектор $e\in\mathbf{R}^n$ так, чтобы

$$a\equiv\tilde{P}_m(e)\neq 0, \quad \text{где} \quad \tilde{P}_m(z)\equiv\sum_{|\alpha|=m}p_\alpha(-iz)^\alpha. \tag{1.7}$$

Тогда $\tilde{P}(z+\lambda e)=a\lambda^m+Q_{m-1}(z, \lambda)$, где Q_{m-1} — многочлен от λ, степени $\leqslant m-1$. Поэтому $\tilde{P}(z+\lambda e)=a(\lambda-\lambda_1(z))\ldots(\lambda-\lambda_m(z))$. Отсюда видно, что контур γ_z при $\forall z\in\mathbf{C}^n$ можно выбрать так, чтобы

$$\frac{1}{2}\leqslant\sup_{\lambda\in\gamma_z}|\lambda|\leqslant 1, \quad |\gamma_z|\leqslant c(m), \quad \inf_{\lambda\in\gamma_z}|\tilde{P}(z+\lambda e)|\geqslant c(m)\cdot a, \qquad (1.8)$$

где $c(m)>0$ не зависит от $z\in\mathbf{C}^n$; $|\gamma_z|$ — длина контура γ_z. Тогда подставляя $\varphi/\tilde{P}$ вместо ψ в интеграл (1.6), из (1.3) и (1.8) немедленно получаем (1.4), (1.5).

Следствие 1.2. Из леммы 1.1 вытекает, что отображение $\varphi(\xi)=\tilde{P}\psi\mapsto\psi(\xi)=\varphi/\tilde{P}$ непрерывно как отображение $\tilde{P}Z$ в $Z(\mathbf{C}^n)$. Поэтому функционал $\tilde{u}$, определенный по формуле (1.2) на $\tilde{P}Z$, непрерывен на $\tilde{P}Z$, т. к. функционал $\tilde{u}$ непрерывен на Z. Но тогда, по теореме Хана — Банаха, $\tilde{f}$ продолжается до непрерывного функционала на $Z(\mathbf{C}^n)$ и теорема 1.1 доказана.

1.2. Проблема деления в классах экспоненциально растущих обобщенных функций. Лестница Хёрмандера.

Теорема 1.2. Пусть $f\in\mathscr{D}'E(\mathbf{R}^n)$. Тогда уравнение (0.1) имеет решение $u\in\mathscr{D}'E(\mathbf{R}^n)$, если только $P\neq 0$.

Доказательство. Согласно предложению 4.3 главы 2, можно считать, что $\tilde{f}$ является аналитическим функционалом вида (4.11) (глава 2), где Ω — некоторая открытая область в $\mathbf{R}^n$: $\forall\psi\in Z$

$$\langle\tilde{f}(z), \psi(z)\rangle=\int\limits_{\operatorname{Im} z=\eta}\tilde{f}(z)\psi(z)\,dz \quad \forall\eta\in\Omega. \qquad (1.9)$$

При этом, искомый функционал $\tilde{u}$ на основные функции $\varphi=\tilde{P}\psi\in\tilde{P}Z$ действует по формуле

$$\langle\tilde{u}, \varphi\rangle=\langle\tilde{f}, \frac{\varphi}{\tilde{P}}\rangle=\int\limits_{\operatorname{Im} z=\eta}\tilde{f}(z)\frac{\varphi(z)}{\tilde{P}(z)}dz \quad \forall\varphi\in\tilde{P}Z. \qquad (1.10)$$

Можно заменить $\psi=\varphi/\tilde{P}$ в последнем интеграле выражением (1.6) и получить таким образом продолжение $\tilde{u}$ на $\varphi\in Z$, поскольку $\tilde{P}(\zeta)\neq 0$ на γz при всех $z\in\mathbf{C}^n$. Существует однако более наглядная конструкция, известная под названием *лестницы Хёрмандера*. А именно, сделаем в $\mathbf{R}^n$ линейную замену координат ξ так, чтобы вектор e из (1.7) стал 1-м базисным вектором. Для простоты изложения будем считать, что сами координаты $\xi_1, \ldots, \xi_n$ обладают этим свойством, т. е. $e=(1, 0, \ldots, 0)$. Тогда (1.10) для случая $\varphi\in\tilde{P}Z$ можно, по теореме Коши, преобразовать к виду

$$\langle\tilde{u}, \varphi\rangle=\int\limits_{\operatorname{Im} z'=\eta'}\left(\int\limits_{\operatorname{Im} z_1=h(z')}\frac{f(z)\varphi(z)}{\tilde{P}(z)}dz_1\right)dz', \qquad (1.11)$$

где $z'=(z_2, \ldots, z_n)$, $\eta'=(\eta_2, \ldots, \eta_n)$, причем $(h, \eta')\in\Omega$. Отметим что, по теореме Бохнера [12], [53], область Ω можно считать выпуклой, так что $(h, \eta')\in\Omega$ при $h\in]\alpha(\eta'), \beta(\eta')[$, где $\alpha(\eta')<\beta(\eta')$. Остается выбрать $h(z')$ для $\forall z'$ так, чтобы на прямой $\operatorname{Im} z_1=h(z')$ в комплексной плоскости $z_1\in\mathbf{C}$ не было корней многочлена $\tilde{P}(z_1, z')$ от z_1. Это возможно, поскольку $\tilde{P}(z)=a(z_1-\lambda_1(z'))\ldots(z_1-\lambda_m(z'))$, причем корни $\lambda_1(z'), \ldots, \lambda_m(z')$ непрерывно зависят от z', поскольку, ввиду (1.7), $a=\tilde{P}_m(1, 0, \ldots, 0)\neq 0$. Поэтому можно выбрать $h(z')$ кусочно непрерывно зависящим от z' при $\operatorname{Im} z'=\eta'$ так, чтобы

$$h(z')\in]\alpha(\eta'), \beta(\eta')[\text{ и } |\tilde{P}(z)|\geqslant\delta>0 \text{ при } \operatorname{Im} z_1=\gamma(z'),$$
$$\operatorname{Im} z'=\eta'. \tag{1.12}$$

Множество $H\equiv\{z\in\mathbf{C}^n : \operatorname{Im} z'=\eta', \ \operatorname{Im} z_1=h(z')\}$ называется *лестницей Хёрмандера*. Из (1.12) вытекает, ввиду оценки (4.10), главы 2, что функционал $\tilde{u}$ из (1.11) непрерывен на пространстве Z.

Следствие 1.3. Уравнение (2.1) главы 1 имеет решение $\mathscr{E}(x)\in\mathscr{D}'E(\mathbf{R}^n)$, если $P(\partial_x)\neq 0$, т. к. $\delta(x)\in\mathscr{D}'E(\mathbf{R}^n)$.

1.3. Проблема деления в классах умеренных распределений. Рассмотрим уравнение (0.1) при $f(x)\in S'(\mathbf{R}^n)$. Решение $u(x)$ также будет искать в классе $S'(\mathbf{R}^n)$. Применим к обеим частям (0.1) преобразование Фурье. Тогда, в силу формулы (2.5) главы 2, получим «алгебраическое уравнение»

$$\tilde{P}(\xi)\tilde{u}(\xi)=\tilde{f}(\xi), \quad \xi\in\mathbf{R}^n, \tag{1.13}$$

которое, в отличие от (1.1), является равенством в $S'(\mathbf{R}^n)$. Эта проблема деления была решена в работах [4], [5], [52], [57].

Теорема 1.3. Уравнение (1.13) имеет решение $\tilde{u}(\xi)\in S'(\mathbf{R}^n)$ при любой правой части $\tilde{f}(\xi)\in S'(\mathbf{R}^n)$, если только $\tilde{P}(\xi)\not\equiv 0$.

Следствие 1.2. Уравнение (0.1) имеет решение $u\in S'$ при $\forall f\in S'$, если $P\neq 0$.

При $f=\delta(x)$ отсюда вытекает теорема 2.2 главы 1.

Уравнение (1.1) легко решается в случае, когда при некотором $c>0$

$$|\tilde{P}(\xi)|\geqslant c(1+|\xi|)^m \text{ при } \xi\in\mathbf{R}^n. \tag{1.14}$$

Такие операторы P называются *строго эллиптическими*. Например, оператор $K\equiv\Delta-m_0^2$ при $m_0\in\mathbf{R}\setminus 0$ строго эллиптичен, поскольку для него символ $\tilde{K}$ имеет вид

$$\tilde{K}(\xi)=-|\xi|^2-m_0^2\Rightarrow|\tilde{K}(\xi)|\geqslant c(1+|\xi|)^2, \quad \xi\in\mathbf{R}^n.$$

Напротив, *оператор Гельмгольца* $H\equiv\Delta+\omega^2$ при $\omega\in\mathbf{R}\setminus 0$ не является строго-эллиптическим, поскольку его символ $\tilde{H}$ равен

$$\tilde{H}(\xi) = -|\xi|^2 + \omega^2 \Rightarrow \tilde{H}(\xi) = 0 \text{ на сфере } |\xi| = |\omega|.$$

Если оператор P строго эллиптический, то уравнение (1.18) легко решается:

$$\tilde{u}(\xi) = \frac{\tilde{f}(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \equiv \frac{1}{\tilde{P}(\xi)} \cdot \tilde{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}^n. \tag{1.15}$$

Отметим, что оператор умножения на $\frac{1}{\tilde{P}(\xi)}$ непрерывен в $S'(\mathbf{R}^n)$, поскольку $g(\xi) \equiv \frac{1}{\tilde{P}(\xi)}$, в силу условия (1.14), удовлетворяет оценкам (1.68) главы 1.

Например, уравнение $\left(\frac{d^2}{dx^2} - m_0^2\right)\mathscr{E}(x) = \delta(x)$, $x \in \mathbf{R}$, после преобразования Фурье принимает вид $(-|\xi|^2 - m_0^2)\tilde{\mathscr{E}}(\xi) = 1$, откуда $\mathscr{E}(x) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-ix\xi}\frac{1}{-\xi^2 - m_0^2}d\xi = -\frac{e^{-m_0|x|}}{2m_0}$ (ср. с формулами (2.22) и (1.11) глав 2 и 1 соответственно).

Почти также просто проблема деления решается в случае, когда $\tilde{P}(\xi) \neq 0$ при $\xi \in \mathbf{R}^n$. Действительно, тогда из (1.15) можно определить $\tilde{u}(\xi)$ как элемент пространства $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$. Однако, требуется еще доказать, что $\tilde{u}(\xi) \in S'(\mathbf{R}^n)$. Но последнее утверждение вытекает из оценки типа (1.14):

Лемма 1.2. Если $\tilde{P}(\xi) \neq 0$ при $\xi \in \mathbf{R}^n$, то

$$|\tilde{P}(\xi)| \geqslant C(1 + |\xi|)^p, \quad \xi \in \mathbf{R}^n, \tag{1.16}$$

где p может быть как положительным, так и отрицательным.

Эта лемма доказывается с помощью принципа Зайденберга — Тарского ([21], [55], [69]).

Из (1.16) легко выводится, как и выше, что функция $g(\xi) \equiv \equiv \frac{1}{\tilde{P}(\xi)}$ удовлетворяет оценкам (1.68) главы 1. Поэтому из (1.15) следует, что $\tilde{u}(\xi) \in S'$, поскольку $\tilde{f} \in S'(\mathbf{R}^n)$.

В общем случае, символ $\tilde{P}(\xi)$ может обращаться в нуль в точках $\xi \in \mathbf{R}^n$. Обозначим

$$\mathscr{S} = \{\xi \in \mathbf{R}^n : \tilde{P}(\xi) = 0\}, \quad \mathscr{R} = \mathbf{R}^n \setminus \mathscr{S}. \tag{1.17}$$

Тогда уравнение (1.1) однозначно определяет сужение $\tilde{u}(\xi)$ на область $\mathscr{R}$ (см. определение 1.5 главы 1):

$$\tilde{u}(\xi)|_{\mathscr{R}} = \frac{1}{\tilde{P}(\xi)}(f(\xi)|_{\mathscr{R}}) \Leftrightarrow \langle \tilde{u}(\xi), \varphi(\xi) \rangle =$$

$$= \langle \tilde{f}(\xi), \frac{\varphi(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \rangle, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathscr{R}). \tag{1.18}$$

Здесь по определению $\frac{\varphi(\xi)}{\tilde{P}(\xi)}=0$ при $\xi\notin\operatorname{supp}\varphi$, а значит и при всех $\xi\in\mathcal{P}$.

Таким образом, чтобы решить проблему деления, нужно продолжить функционал (1.18), заданный в области $\mathcal{R}$, до распределения $\tilde{u}(\xi)\in S'(\mathbf{R}^n)$.

Эта задача, в свою очередь, называется *проблемой регуляризации*. Согласно теореме 1.3, она всегда имеет решение, если $\tilde{P}(\xi)\not\equiv 0$.

Замечание 1.1. Если $\mathcal{P}\neq\varnothing$, то решение проблемы регуляризации заведомо неединственно. Например, к $\tilde{u}(\xi)$ всегда можно добавить $c\delta(\xi-\xi_0)$, где $\xi_0\in\mathcal{P}$, т. к. $\tilde{P}(\xi)\delta(\xi-\xi_0)=0$, $\xi\in\mathbf{R}^n$. Если же функция $h(\xi)\equiv\tilde{P}(\xi)$ удовлетворяет условию (1.24) главы 1, то и $\tilde{P}(\xi)\delta(\tilde{P}(\xi))=0$, так что к $\tilde{u}$ можно в этом случае добавить $c\delta(\tilde{P}(\xi))$, если $\delta(\tilde{P}(\xi))\in S'(\mathbf{R}^n)$. Например, для символа $-|\xi|^2+\omega^2$ оператора Гельмгольца $H=\Delta+\omega^2$ при $\omega\in\mathbf{R}\setminus 0$ условие (1.24) главы 1 выполняется и $\delta(-|\xi|^2+\omega^2)\in S'(\mathbf{R}^n)$ (см. (1.23) из главы 1).

§ 2. Регуляризация. Методы «вычитаний», выхода в комплексную область, метод степеней Рисса

Проблему регуляризации достаточно решить для случая, когда

$$\tilde{f}(\xi)\in C(\mathbf{R}^n) \text{ и } |\tilde{f}(\xi)|\leqslant c(1+|\xi|)^N, \quad \xi\in\mathbf{R}^n, \tag{2.1}$$

поскольку любое распределение $\tilde{f}\in S'(\mathbf{R}^n)$ можно представить в виде конечной суммы производных от функций со свойствами (2.1). Итак, пусть $\tilde{f}(\xi)$ удовлетворяет условиям (2.1). Обозначим $R(\xi)=\frac{\tilde{f}(\xi)}{\tilde{P}(\xi)}$, $\xi\in\mathcal{R}$. Вообще говоря, $R(\xi)\notin L_1^{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$, так что по $R(\xi)$ нельзя (вообще говоря) построить обобщенную функцию R при помощи формулы (1.2) главы 1. Поэтому будем называть $R(\xi)$ *формальной функцией*.

Определение 2.1. Обобщенная функция $\hat{R}(\xi)\in S'(\mathbf{R}^n)$ называется *регуляризацией формальной функции* $R(\xi)\in C(\mathbf{R}^n\setminus\mathcal{P})$, если

$$\langle\hat{R},\varphi\rangle=\langle R,\varphi\rangle\equiv\int_{\mathcal{R}}R(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n\setminus\mathcal{P}). \tag{2.2}$$

Если $\hat{R}^1$ и $\hat{R}^2$ — две различные регуляризации $R(\xi)$, то из (2.2) вытекает, что $\operatorname{supp}(\hat{R}^1-\hat{R}^2)\subset\mathcal{P}$.

Сложность проблемы регуляризации зависит от устройства множества $\mathcal{P}$ и от характера роста $R(\xi)$ вблизи $\mathcal{P}$. В доказательстве теоремы 1.3 решающую роль играют два обстоятельства:

1) алгебраическое многообразие $\mathcal{P}$ из (1.16) является объединением конечного множества аналитических подмногообразий в $\mathbf{R}^n$ разной размерности:

$$\mathcal{P}=\bigcup_{k=0}^{n-1}\mathcal{P}^k, \quad \dim\mathcal{P}^k=k, \tag{2.3}$$

где $\mathcal{P}^k$ — аналитическое подмногообразие в $\mathbf{R}^n$;

2) $\frac{1}{\tilde{P}(\xi)}$ растет при приближении к $\mathcal{P}$ не быстрее некоторой (отрицательной) степени расстояния до $\mathcal{P}$ (*неравенство Лоясевича* [62]): при некоторых N и ν

$$\frac{1}{|\tilde{P}(\xi)|}\leqslant\frac{c\,(1+|\xi|)^N}{\rho^\nu(\xi)}, \quad \rho(\xi)\equiv\rho(\xi,\mathcal{P}), \quad \xi\in\mathbf{R}^n\diagdown\mathcal{P}. \tag{2.4}$$

Оценка (2.4) доказывается при помощи принципа Зайденберга—Тарского [21], [55], как и (1.16)

2.1. Метод вычитания [46]. Для простоты изложения ограничимся случаем, когда $\mathcal{P}$ — гладкое подмногообразие в $\mathbf{R}^n$, т. е. разложение (2.3) состоит из одного слагаемого $\mathcal{P}^k$, где $0\leqslant k\leqslant n-1$.

Пусть сначала $k=0$, так что $\mathcal{P}=\mathcal{P}^0$ — дискретное множество точек (если $\mathcal{P}^0$ не дискретно, то оценка (2.4) не может выполняться). Итак $\mathcal{P}=\{a_j\in\mathbf{R}^n,\ j=1,\dots\}$ и ε_j-окрестность точки a_j не содержит других точек a_i, $\varepsilon_j>0$. Тогда регуляризацию можно построить вычитанием из $\varphi(x)$ конечных отрезков ряда Тейлора:

$$\langle\hat{R},\varphi\rangle\equiv\sum_j\int\limits_{|\xi-a_j|<\varepsilon_j/2}R(\xi)\Big[\varphi(\xi)-\varphi(a_j)-\dots$$

$$\dots-\sum_{|\alpha|=[\nu]-n}\frac{\varphi^{(\alpha)}(a_j)}{\alpha!}(\xi-a_j)^\alpha\Big]d\xi+\int\limits_{\mathcal{R}_{(\varepsilon)}}R(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{2.5}$$

где

$$\mathcal{R}_{(\varepsilon)}\equiv\{\xi\in\mathcal{R}:|\xi-a_j|>\varepsilon_j/2\ \ \forall j\}, \quad \varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n),$$

очевидно, $\hat{R}\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ и $\langle\hat{R},\varphi\rangle=\int R(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi$, если $\operatorname{supp}\varphi\subset\mathcal{R}$, так что $\hat{R}\in\mathcal{D}'$ является регуляризацией функции $R(\xi)$ в смысле (2.2). Однако, еще нужно доказывать, что существует $\hat{R}\in S'$.

Пример 2.1. Для $n=1$ и $R(\xi)=\frac{1}{\xi}$ можно определить регуляризацию $\hat{R}$ как главное значение по Коши: для $\varphi(\xi)\in S(\mathbf{R})$

$$\langle \hat{R}, \varphi \rangle = \langle \text{v. p.} \frac{1}{\xi}, \varphi(\xi) \rangle \equiv \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{|\xi|>\varepsilon} \frac{\varphi(\xi)}{\xi}\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\xi)-\varphi(0)}{\xi}\, d\xi + \int\limits_{|\xi|>1} \frac{\varphi(\xi)}{\xi}\, d\xi. \qquad (2.5')$$

Пример 2.2. Для оператора Гельмгольца $H=\Delta+\omega^2$, $\omega\in\mathbf{R}\setminus 0$ в $\mathbf{R}^n$ символ $\tilde{H}(\xi)=-|\xi|^2+\omega^2$ и $\operatorname{grad} H(\xi)=-2\xi\neq 0$ при $\tilde{H}(\xi)=0$. Поэтому регуляризацию $R\equiv\frac{1}{\tilde{H}(\xi)}$ можно определить по формуле $\hat{R}(\xi)=\text{v. p.}\frac{1}{-|\xi|^2+\omega^2}$. Рассмотрим теперь более общий случай, когда $\mathscr{S}=\mathscr{S}^k$ и $1\leqslant k\leqslant n-1$. Пусть для простоты $\mathscr{S}^k$ компактное многообразие. Для $\varepsilon>0$ обозначим ε-окрестность $\mathscr{S}^k$ через $\mathscr{S}^k_\varepsilon$. Тогда при некотором $\varepsilon>0$ существует диффеоморфизм h: $\mathscr{S}^k_\varepsilon\to\mathscr{S}^k\times D^{n-k}$, где D^{n-k} — шар в $\mathbf{R}^{n-k}$ радиуса 1 (или ε, все равно), переводящий $\xi\in\mathscr{S}^k_\varepsilon$ в $h(\xi)=(\xi^s, \xi^D)$, где $\xi^s\in\mathscr{S}^k$, $\xi^D\in D^{n-k}$, $h(\mathscr{S}^k)=\mathscr{S}^k\times\{0\}$. Тогда регуляризацию $\hat{R}$ можно построить в виде, аналогичном (2.5): для $\varphi\in S(\mathbf{R}^n)$

$$\langle \hat{R}, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathscr{S}^k_\varepsilon} R(\xi) \Bigg[\varphi_h(\xi^s, 0) - \varphi_h(\xi^s, 0) - \ldots$$

$$\ldots - \sum_{|\alpha|=[\nu]-k} \frac{\partial^\alpha_{\xi^D}\varphi_h(\xi^s, 0)(\xi^D)^\alpha}{\alpha!} \Bigg] d\xi + \int\limits_{\mathscr{R}_{(\varepsilon)}} R(\xi)\,\varphi(\xi)\, d\xi,$$

где

$$\mathscr{R}_{(\varepsilon)} \equiv \mathbf{R}^n \setminus \mathscr{S}_\varepsilon, \quad \varphi_h(\xi^s, \xi^D) \equiv \varphi(h^{-1}(\xi^s, \xi^D)) = \varphi(\xi).$$

Отметим, что здесь $\partial^\alpha_{\xi^D}\varphi_h(\xi^s, 0)$ — это производная от $\varphi_h(\xi^s, \xi^D)$, взятая в точке $\xi^D=0$, и $(\xi^s, 0)\in h(\mathscr{S}^k)$.

Поскольку $\mathscr{S}^k$ — компактное многообразие, то $\hat{R}\in S'(\mathbf{R}^n)$.

В общем случае для многообразия $\mathscr{S}$ вида (2.3) регуляризация $\hat{R}\in S'(\mathbf{R}^n)$ строится аналогично, с использованием оценки (2.4). При этом в окрестности каждой «страты» $\mathscr{S}^k$ множества $\mathscr{S}$ подходящие координаты строятся при помощи т. н. *σ-процесса* (иначе — *разрешения особенности*) [52], [57].

Таким образом решается проблема регуляризации, и по этой же схеме доказывается теорема 1.3 ([52], [57]).

2.2. Метод выхода в комплексную область. Такой метод регуляризации применим в тех случаях, когда $R(\xi)$ при $\xi\in\mathscr{R}$ является сужением в смысле определения 1.11 главы 1 на $\mathscr{R}$ функции $R(z)$, голоморфной в некоторой трубчатой области в $\mathbf{C}^n$. При этом существование регуляризации выводится из леммы 1.5 главы 1.

Не приводя общих формулировок, ограничимся рассмотрением конкретных примеров.

1) Для функции $R(\xi)=\frac{1}{\xi}$, $\xi\in\mathbf{R}\setminus 0$, можно определить регуляризацию формулами $\hat{R}_+(\xi)=\frac{1}{\xi+i0}$ или $\hat{R}_-(\xi)=\frac{1}{\xi-i0}$. При этом $F^{-1}\hat{R}_\pm(\xi)\equiv\mp i\theta(\pm x)=0$ при $x\lessgtr 0$, в соответствии с теоремой 5.2 главы 2, поскольку $\hat{R}_\pm(\xi)$ аналитически продолжается в область $\operatorname{Im}\xi\gtrless 0$.

Следствие 2.1. Для оператора Гельмгольца из примера 2.2 регуляризацию функции $R(\xi)\equiv\frac{1}{\tilde{H}(\xi)}$ можно определить как суперпозицию $\frac{1}{\zeta\pm i0}$ с $\zeta\equiv\tilde{H}(\xi)=-|\xi|^2+\omega^2$, поскольку $\operatorname{grad}\tilde{H}(\xi)=-2\xi\neq 0$ при $\tilde{H}(\xi)=0$: $\hat{R}_\pm(\xi)\equiv\frac{1}{-|\xi|^2+\omega^2\pm i0}$.

Замечание 2.1. Регуляризация $\hat{R}_+(\xi)$ используется для нахождения предельной амплитуды расходящейся волны. Эта амплитуда соответствует предельному поглощению и удовлетворяет условию отсутствия излучения Зоммерфельда (см. [8], [22], [36]) при $\omega>0$.

2) Для *волнового оператора*

$$\Box\equiv\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\Delta,\quad a>0, \tag{2.6}$$

символ равен $\tilde{\Box}(\tau,\xi)=-\tau^2+a^2|\xi|^2$, $\tau\in\mathbf{R}$, $\xi\in\mathbf{R}^k$. Легко проверить, что $\tilde{\Box}(\tau,\xi)\neq 0$ в трубчатой области T_{K^*} с основанием $K^*=\{(s,\eta)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^k:|s|>a|\eta|\}$. Эта область имеет две связные компоненты $K^*_\pm$, в которых $s>0$ или $s<0$ соответственно. Поэтому можно определить две различные регуляризации

$$\left(\frac{1}{\tilde{\Box}(\tau,\xi)}\right)_\pm\equiv\frac{1}{-(\tau\pm i0)^2+a^2|\xi|^2},\quad (\tau,\xi)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^k.$$

Из теоремы 5.2 главы 2 следует, что

$$\mathscr{E}_\pm(t,x)\equiv F^{-1}\left(\left(\frac{1}{\tilde{\Box}(\tau,\xi)}\right)_\pm\right)=0 \text{ при } \pm at<|x|.$$

Действительно, обозначим $K_\pm=\{(t,x)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^k:\pm at>|x|\}$. Тогда $K^*_\pm$ — двойственные к $K_\pm$ конусы, и $\tilde{\mathscr{E}}_\pm(\tau,\xi)$ аналитически продолжается в $T_{K^*_\pm}$.

3) Аналогично, для *оператора Клейна—Гордона* $\mathscr{K}\equiv\Box+m^2$, $m>0$, символ $\tilde{\mathscr{K}}(\tau,\xi)=\tilde{\Box}(\tau,\xi)+m^2\neq 0$ в T_{K^*}. Поэтому имеются две различные регуляризации

$$\left(\frac{1}{\tilde{\mathscr{K}}(\tau,\xi)}\right)_\pm\equiv\frac{1}{-(\tau\pm i0)^2+a^2|\xi|^2+m^2},\quad (\tau,\xi)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^k,$$

и из теоремы 5.2 главы 2 следует, что

$$\mathscr{E}_{\pm}(t, x) \equiv F^{-1}\left(\frac{1}{\widetilde{\mathscr{K}}(\tau, \xi)}\right)_{\pm} = 0 \text{ при } \pm at < |x|.$$

2.3. Метод комплексных степеней Рисса. Грубо говоря, идея *метода Рисса* заключается в том, что $\widetilde{P}^{\lambda}(\xi)$ — аналитическая функция от $\lambda \in \mathbf{C}$ со значениями в $S'(\mathbf{R}^n)$ при $\operatorname{Re}\lambda > 0$, и поэтому возникает гипотеза, что функция $\widetilde{P}^{\lambda}(\xi)$ аналитически продолжается в область $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$ и $\widetilde{P}^{-1}(\xi)$ (значение продолжения функции $\widetilde{P}^{\lambda}$ при $\lambda = -1$) является регуляризацией формальной функции $\frac{1}{\widetilde{P}(\xi)}$.

Оказывается, эта гипотеза справедлива с некоторыми уточнениями. А именно,

1) $\widetilde{P}^{\lambda}(\xi)$ продолжается до мероморфной функции от $\lambda \in \mathbf{C}$ со значениями в $S'(\mathbf{R}^n)$ и

2) регуляризацией $\frac{1}{\widetilde{P}(\xi)}$ является регулярная часть мероморфной функции $\widetilde{P}^{\lambda}$ при $\lambda = -1$.

Сформулируем точно имеющиеся в этой области результаты ([4], [5], [18]).

Пусть $\widetilde{P}(\xi)$ — вещественный многочлен от $\xi \in \mathbf{R}^n$. Тогда при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ определим

$$\widetilde{P}^{\lambda}(\xi) = \begin{cases} \widetilde{P}^{\lambda}(\xi) \text{ при } \widetilde{P}(\xi) \geqslant 0, \\ (-1)^{\lambda} |\widetilde{P}(\xi)|^{\lambda} \text{ при } \widetilde{P}(\xi) < 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

где $(-1)^{\lambda}$ — произвольная ветвь, например $(-1)^{\lambda} = e^{\lambda\pi i}$; подразумевается, что $a^{\lambda} = e^{\lambda \ln a}$ при $a > 0$. Отметим, что при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ и $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\widetilde{P}^{\lambda+k}(\xi) = \widetilde{P}^{k}(\xi) \cdot \widetilde{P}^{\lambda}(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}^n. \tag{2.8}$$

При $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ функция $\widetilde{P}^{\lambda}(\xi)$ непрерывна и по ней можно построить распределение $\in S'(\mathbf{R}^n)$. Отметим, что

$$\widetilde{P}^{\lambda}(\xi) \to 1 \text{ при } \lambda \to 0, \quad \operatorname{Re}\lambda > 0. \tag{2.9}$$

Через $\widetilde{P}_{+}$ обозначается функция

$$\widetilde{P}_{+}(\xi) = \begin{cases} \widetilde{P}(\xi), & \widetilde{P}(\xi) \geqslant 0, \\ 0, & \widetilde{P}(\xi) < 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

В [4], [5] доказана

Теорема 2.1. 1) Функция $\widetilde{P}_{+}^{\lambda}$ (и $|\widetilde{P}|^{\lambda}$) из области $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ продолжается до мероморфной функции от $\lambda \in \mathbf{C}$ со значениями в $S'(\mathbf{R}^n)$.

2) Множество полюсов П функции $\tilde{P}_+^\lambda$ (и $|\tilde{P}|^\lambda$) от λ является объединением конечного множества арифметических прогрессий.

Доказательство этой теоремы использует σ-процесс для разрешения особенностей алгебраического многообразия $\mathcal{P}$ (см. (1.17)). В [4] имеется упрощенное доказательство, не использующее σ-процесса.

Из теоремы 2.1 вытекает также мероморфность аналитического продолжения функции $\tilde{P}^\lambda$, поскольку, ввиду (2.7), (2.10),

$$\tilde{P}^\lambda = \tilde{P}_+^\lambda + (-1)^\lambda (-\tilde{P})_+^\lambda \text{ при } \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0.$$

Таким образом, $\tilde{P}^\lambda$ при аналитическом продолжении из области $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ имеет в точке $\lambda = -1$ изолированный полюс конечного порядка N или регулярна (тогда $N=0$):

$$\tilde{P}^\lambda(\xi) = \sum_{k=1}^{N} \frac{r_k(\xi)}{(\lambda+1)^k} + \hat{R}_\lambda(\xi), \tag{2.11}$$

где $r_k \in S'(\mathbf{R}^n)$, а $\hat{R}_\lambda(\xi)$ — аналитическая функция от λ в некоторой окрестности точки $\lambda = -1$ со значениями в $S'(\mathbf{R}^n)$.

Предложение 5.1. Функция $\hat{R}_{-1}(\xi) \in S'(\mathbf{R}^n)$ является регуляризацией формальной функции $\dfrac{1}{\tilde{P}(\xi)}$ и

$$\tilde{P}(\xi) \cdot \hat{R}_{-1}(\xi) = 1, \quad \xi \in \mathbf{R}^n, \tag{2.12}$$

где равенство понимается в смысле обобщенных функций.

Доказательство. Из (2.9) и (2.8) следует, что

$$\tilde{P}(\xi) \cdot \tilde{P}^\lambda(\xi) = \tilde{P}^{\lambda+1}(\xi) \to 1 \text{ при } \lambda \to -1, \ \operatorname{Re}\lambda > -1. \tag{2.13}$$

Отметим, что это равенство справедливо в смысле $S'(\mathbf{R}^n)$ при всех $\lambda \in \mathbf{C}$, кроме $\lambda \in \Pi$, *в силу единственности аналитического продолжения*. Но из (2.13) и (2.11) вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\tilde{P}(\xi) \cdot r_k(\xi)}{(\lambda+1)^k} + \tilde{P}(\xi) \tilde{R}_\lambda(\xi) \to 1 \text{ при } \lambda \to -1, \ \operatorname{Re}\lambda > -1.$$

Это возможно лишь если

$$\tilde{P}(\xi) \cdot r_k(\xi) = 0, \ \xi \in \mathbf{R}^n \ \forall k = 1, \ldots, N \text{ и } \tilde{P}(\xi) \cdot \hat{R}_{-1}(\xi) = 1.$$

§ 3. Уравнения в выпуклом конусе. Операционное исчисление

3.1. Уравнения в конусе. Пусть K — (выпуклый) замкнутый конус в $\mathbf{R}^n$, т. е. $K + K \subset K$ и $tK \subset K$ $\forall t \geqslant 0$, и пусть K не содержит прямых. Рассмотрим дифференциальное уравнение (0.1) в K. Точнее, в классе функций с носителем в K:

$$P(\partial_x) u(x) = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{3.1}$$

где

$$f \in S'_K(\mathbf{R}^n) \equiv \{f \in S' : \operatorname{supp} f \subset K\}.$$

Решение u также будем искать в S'_K. Тогда, по теореме 5.2 главы 2, функции $\tilde{u}(\xi)$ и $\tilde{f}(\xi)$ аналитически продолжаются в T_{K^*} и тождество (1.13) также справедливо в T_{K^*}:

$$\tilde{P}(z)\tilde{u}(z)=\tilde{f}(z), \quad z\in T_{K^*}. \tag{3.2}$$

Сформулируем необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (3.1) в классах $S'_K(\mathbf{R}^n)$. Обозначим

$$V=\{z\in\mathbf{C}^n:\tilde{P}(z)=0\} \quad \text{и} \quad V_{K^*}\equiv V\cap T_{K^*}. \tag{3.3}$$

Также обозначим через $\mathcal{I}_{K^*}(\tilde{P})$ идеал в кольце голоморфных функций в T_{K^*}, порожденный многочленом $\tilde{P}(z)$.

Главное наблюдение состоит в том, что, в силу (3.2),

$$\tilde{f}(z)=0 \quad \text{при} \quad z\in V_{K^*}. \tag{3.4}$$

Более того, из (3.2) вытекает, что

$$\tilde{f}(z)\in\mathcal{I}_{K^*}(\tilde{P}). \tag{3.5}$$

При помощи теоремы 5.2 главы 2 и метода доказательства леммы 1.1, доказывается

Теорема 3.1 ([12], [28]). 1) Для того чтобы уравнение (3.1) имело решение $u\in S'_K$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3.5), т. е. чтобы функция $\tilde{f}(z)/\tilde{P}(z)$ была голоморфной в T_{K^*}.

2) Если $\operatorname{grad}\tilde{P}(z)\neq 0$ при всех $z\in V_{K^*}$, кроме аналитического подмногообразия в T_{K^*} коразмерности $\geqslant 2$, то условие (3.5) эквивалентно (3.4).

Пример 3.1. Пусть $n=2$ и $K=\{x\in\mathbf{R}^2:x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0\}$ — первый квадрант плоскости. Тогда для разрешимости уравнения

$$\Delta u(x)-u(x)=f(x), \quad x\in\mathbf{R}^2, \tag{3.6}$$

в классе $u\in S'_K$ при $f\in S'_K$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\tilde{f}(z_1, z_2)=0 \text{ при } z_1^2+z_2^2+1=0, \operatorname{Im} z_1>0, \operatorname{Im} z_2>0. \tag{3.7}$$

Далее, рассмотрим уравнение (3.1) в классах экспоненциально растущих распределений u, $f\in\mathcal{D}'E_K=\mathcal{D}'E(\mathbf{R}^n)\cap\mathcal{D}'_K$ (см. определение 5.2 главы 2). Тогда, по теореме 5.3 главы 2, функционалы $\tilde{u}$, $\tilde{f}\in Z'$ являются голоморфными функционалами в области $T_{K^*_R}$ при некотором достаточно большом $R>0$ (см. формулу (5.9) главы 2). Обозначая голоморфные локальные плотности функционалов $\tilde{u}$ и $\tilde{f}$ также через $\tilde{u}(z)$ и $\tilde{f}(z)$, мы из (3.1), в силу предложения 4.2 главы 2, получаем тождество (3.2) в области $T_{K^*_R}$ вместо T_{K^*}:

$$\tilde{P}(z)\tilde{u}(z)=\tilde{f}(z), \quad z\in T_{K^*_R}. \tag{3.8}$$

Поэтому условия (3.4) и (3.5) также выполняются при замене K^* на K_R^* при достаточно большом $R>0$.

Аналогично теореме 3.1, при помощи теоремы 5.3 главы 2 и метода доказательства леммы 1.1, доказывается

Теорема 3.1′ 1) Для того чтобы уравнение (3.1) при $f\in\mathscr{D}'E_K$ имело решение $u\in\mathscr{D}'E_K$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\tilde{f}(z)\in\mathscr{I}_{K_R^*}(\tilde{P}) \text{ при некотором } R>0. \qquad (3.9)$$

2) Если $\operatorname{grad}\tilde{P}(z)\neq 0$ при всех $z\in V_{K_R^*}\equiv V\cap T_{K_R^*}$, кроме подмногообразия в $T_{K_R^*}$ коразмерности $\geqslant 2$, то условие (3.9) эквивалентно условию

$$\tilde{f}(z)=0 \quad \text{при} \quad z\in V_{K_R^*}. \qquad (3.10)$$

Здесь $\mathscr{I}_{K_R^*}(\tilde{P})$ — идеал в кольце голоморфных функций в $T_{K_R^*}$, порожденный многочленом $\tilde{P}(z)$.

3.2. Операционное исчисление. Возьмем $n=1$ и $K=\overline{\mathrm{R}}_+\equiv\equiv\{x\in\mathrm{R}: x\geqslant 0\}$. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение (0.1) на полуоси

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)u(x)=\sum_{k=0}^{m}p_k\left(\frac{d}{dx}\right)^k u(x)=f(x), \quad x>0, \qquad (3.11)$$

где $f(x)\in\mathscr{D}'E(\overline{\mathrm{R}}_+)$.

Для простоты изложения предположим, что $f(x)\in C(\overline{\mathrm{R}}_+)$ и $u(x)\in C^m(\overline{\mathrm{R}}_+)$. Чтобы однозначно определить решение $u(x)$, зададим начальные условия

$$u(0+)=u^0,\ldots,u^{(m-1)}(0+)=u^{m-1}. \qquad (3.12)$$

Решим задачу Коши (3.11), (3.12) при помощи преобразования Фурье. Преобразование Фурье для функций с носителем в $\overline{\mathrm{R}}^+$ иногда называют *преобразованием Фурье — Лапласа*. Чтобы применить преобразование Фурье к уравнению (3.11), продолжим его на всю ось $x\in\mathrm{R}$:

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)u_0(x)=lf(x)\equiv f_0(x)+\sum_{k=0}^{m-1}b_k(U_{(0)})\,\delta^{(k)}(x), \quad x\in\mathrm{R}. \qquad (3.13)$$

Здесь приняты обозначения

$$u_0(x)\equiv\begin{cases}u(x), & x>0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$$

$$f_0(x) \equiv \begin{cases} f(x), & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases} \quad U_{(0)} \equiv (u^0, \ldots, u^{m-1}), \tag{3.14}$$

а $b_k(U_{(0)})$ — константы: из формулы (1.10) главы 1 вытекает, что

$$b_{m-1}(U_{(0)}) = p_m u^0, \quad b_{m-2}(U_{(0)}) = p_m u^1 + p_{m-1} u^0, \ldots$$

Уравнение (3.13) представляет собой задачу вида (3.1).

Предположим, что $u(x)$ и $f(x)$ при $x \to +\infty$ имеют рост не выше экспоненциального:

$$|u(x)| \leqslant C_1 e^{Bx}, \quad |f(x)| \leqslant C_2 e^{Bx}, \quad x > 0. \tag{3.15}$$

Тогда, по теореме 5.3 главы 2 (формула (5.10) глава 2),

$$\tilde{u}_0(z) = \int_0^\infty e^{izx} u(x)\, dx,$$

$$\tilde{f}_0(z) = \int_0^\infty e^{izx} f(x)\, dx \text{ при } \operatorname{Im} z > B. \tag{3.16}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае $K^* = \mathbf{R}_+ = \{s \in \mathbf{R} : s > 0\}$, так что $T_{K^*} = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ и $K_R^* = \{s \in \mathbf{R} : s > R\}$, $T_{K_{\mathbf{R}}^*} = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > R\}$. Поэтому из (3.13) вытекает, согласно (3.8), что

$$\tilde{P}(z)\tilde{u}_0(z) = \tilde{l}f(z) \equiv \tilde{f}_0(z) + \sum_{k=0}^{m-1} b_k(-iz)^k \text{ при } \operatorname{Im} z > B. \tag{3.17}$$

Отсюда находим локальную плотность $\tilde{u}_0(z)$ функционала $\tilde{u}_0 \equiv \equiv F u_0$:

$$\tilde{u}_0(z) = \frac{\tilde{l}f(z)}{\tilde{P}(z)} \text{ при } \operatorname{Im} z > B. \tag{3.18}$$

Однако функционал $\tilde{u}_0 \in Z'(\mathbf{C})$, определяемый этой плотностью в области $\operatorname{Im} z > R$ является, по теореме 3.1′, преобразованием Фурье от распределения $u \in \mathcal{D}' E_{\overline{\mathbf{R}+}}$ в том и только в том случае, когда $\tilde{u}_0(z)$ голоморфна при $\operatorname{Im} z > R$, т. е. выполняется условие (3.9).

Многочлен $\tilde{P}(z)$ имеет m нулей (считая с кратностью)

$$\tilde{P}(z_k) = 0, \quad k = 1, \ldots, m, \quad z_k \in \mathbf{C}. \tag{3.19}$$

Поэтому $\tilde{P}(z) \neq 0$ при $\operatorname{Im} z > M \equiv \max\limits_k \operatorname{Im} z_k$, так что условие (3.9) выполняется при $R > \max(M, B)$.

Итак, по теореме 3.1′, уравнение (3.13) имеет решение $u_0(x) \in \mathcal{D}' E_{\overline{\mathbf{R}+}}$,

$$u_0 = F^{-1}(\tilde{u}_0(z)\,|_{\operatorname{Im} z > \max(M, B)}), \tag{3.20}$$

где $\tilde{u}_0(z)$ находится по формуле (3.18), и $\tilde{u}_0(z)$ единственна при условиях (3.15). Проще всего выглядит решение u_0 в случае, когда $f(x)\equiv 0$, а корни z_j — простые, т. е. $z_i \neq z_j$ при $i \neq j$. А именно, тогда формулу (3.18) можно преобразовать к виду

$$\tilde{u}_0(z) = i \sum_{k=1}^{m} \frac{d_k(U_{(0)})}{z - z_k}. \tag{3.21}$$

Отсюда получаем, аналогично формуле (5.13) главы 2, что

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{m} d_k(U_{(0)})\,\theta(x)\,e^{-iz_k x} \Rightarrow u(x) = \sum_{k=1}^{m} d_k(U_{(0)})\,e^{-iz_k x}, \quad x > 0. \tag{3.22}$$

В общем случае находят $u_0(x)$ из (3.18) при помощи таблиц для *преобразования Лапласа* ([25], [45]), которое отличается от преобразования Фурье — Лапласа заменой $z \mapsto s = -iz$.

Отметим, что если мы хотим найти решение u, для которого $|u(x)| \leqslant Ce^{Dx}$, $x > 0$, то плотность $\tilde{u}_0(z)$ должна быть аналитична при $\operatorname{Im} z > D$. Поэтому, из (3.17) вытекает необходимость условия

$$\tilde{l}f(z_k) = 0 \text{ при } \operatorname{Im} z_k > D. \tag{3.23}$$

Это условие также и достаточно, если корни z_k простые $\operatorname{Im} z_k \neq D$ $\forall k$, и $f = 0$. Если же корень z_k имеет кратность ν_k, то условие (3.23) нужно заменить на

$$\tilde{l}f^{(j)}(z_k) = 0 \text{ при } \operatorname{Im} z_k > D, \quad j = 0, \ldots, \nu_k - 1.$$

Это условие на $u^0, \ldots, u^{m-1}$ при $f = 0$ необходимо и достаточно для существования решения $u(x)$, для которого $|u(x)| \leqslant ce^{Dx}$ при $x > 0$, если $\operatorname{Im} z_k \neq D$ $\forall k$.

Пример 3.2. Рассмотрим задачу

$$u''(x) - 3u'(x) = 0, \quad x > 0; \quad u(0+) = 1, \quad u'(0+) = 2.$$

Тогда уравнение (3.17) принимает вид

$$(-z^2 + 3iz)\,\tilde{u}_0(z) = -iz - 1, \quad \operatorname{Im} z > 3.$$

Отсюда находим

$$\tilde{u}_0(z) = \frac{iz+1}{z^2 - 3iz} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z - 3i}, \quad \operatorname{Im} z > 3;$$

$A = \frac{i}{3}$, $B = \frac{2i}{3}$ и, согласно (3.22),

$$u_0(x) = \frac{1}{3}\theta(x) + \frac{2}{3}\theta(x)\,e^{3x} \Rightarrow u(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{3x} \text{ при } x > 0.$$

3.3. Дифференциально-разностные уравнения на полуоси [25], [45]. Рассмотрим *уравнение с запаздывающим аргументом* на полуоси $x > 0$:

$$\sum_{k=0}^{m} p_k u^{(k)}(x-h_k)=f(x), \quad x>0, \tag{3.24}$$

где $p_m \neq 0$ и $h_k \geqslant h_m=0$ при $0 \leqslant k \leqslant m-1$. Предположим, что $f(x)$ удовлетворяет условию (3.15). В качестве начальных условий можно наложить требование

$$u(x)=0 \text{ при } x<0, \quad u \in \mathscr{D}'E_{\overline{\mathbf{R}_+}} \cap C^m(\mathbf{R}).$$

Заметим, что (3.24) является *уравнением в свертках*

$$(P*u)(x)=f_0(x), \quad x \in \mathbf{R}, \tag{3.25}$$

где

$$P(x) \equiv \sum_{k=0}^{m} p_k \delta^{(k)}(x-h_k).$$

Поэтому, из (3.15), по теореме 6.2 главы 2, следует, что, аналогично (3.8),

$$\tilde{P}(z) \cdot \tilde{u}(z)=\tilde{f}(z), \quad \operatorname{Im} z>B.$$

Здесь

$$\tilde{P}(z)=\sum_{k=0}^{m} p_k(-iz)^k e^{ih_k z}, \quad z \in \mathbf{C},$$

— *символ оператора свертки* (3.25), равный преобразованию Фурье от «сверточного ядра» $P(x)$. Поскольку $p_m \neq 0$, $h_k \geqslant h_m=0$ при $1 \leqslant k \leqslant m-1$, и $|e^{ih_k z}|=e^{-h_k \operatorname{Im} z}$, то

$$|\tilde{P}(z)| \geqslant c|z|^m \text{ при } \operatorname{Im} z>M$$

при некотором $c>0$ для достаточно большого $M>0$. Отсюда вытекает, что частное

$$\tilde{u}(z) \equiv \frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{P}(z)} \text{ при } \operatorname{Im} z>R=\max(M, B)$$

удовлетворяет оценкам вида (5.11) главы 2. Следовательно, по теореме 5.3 главы 2, аналитический функционал $\tilde{u}(z)|_{\operatorname{Im} z>R}$ является преобразованием Фурье от распределения $u \in \mathscr{D}'E_{\overline{\mathbf{R}_+}}$, и удовлетворяет уравнениям (3.24) и (3.25).

§ 4. Распространение особенностей и гладкость решений

4.1. Характеристики дифференциальных операторов. Обозначим через P_m *главную однородную часть оператора* P из (0.1):

$$P_m(\partial_x) \equiv \sum_{|\alpha|=m} p_\alpha \partial_x^\alpha. \tag{4.1}$$

Рассмотрим сначала уравнение (0.1) с таким однородным оператором P_m в случае $f=0$:

$$P_m(\partial_x)u(x)=0,\ x\in\mathbf{R}^n. \tag{4.2}$$

Найдем решения этого уравнения, имеющие вид плоских волн:

$$u(x)=w(\xi\cdot x),\ x\in\mathbf{R}^n;\ \xi\in\mathbf{R}^{n*}\setminus 0;\ \xi\cdot x\equiv\xi_1x_1+\ldots+\xi_nx_n, \tag{4.3}$$

где $w\in\mathscr{D}'(\mathbf{R})$. Для этого подставим (4.3) в (4.2):

$$P_m(\partial_x)w(\xi x)=w^{(m)}(\xi x)\sum_{|\alpha|=m}p_\alpha\xi^\alpha=0. \tag{4.4}$$

Отметим, что $P_m(\xi)\equiv\sum\limits_{|\alpha|=m}p_\alpha\xi^\alpha=i^m\tilde{P}_m(\xi)$. Из (4.4) вытекает

Предложение 4.1. Функция (4.3) удовлетворяет уравнению (4.2) при $\forall w\in\mathscr{D}'(\mathbf{R})$, если ковектор $\xi\in\mathbf{R}^{n*}\setminus 0$ удовлетворяет *характеристическому уравнению*

$$P_m(\xi)\equiv\sum_{|\alpha|=m}p_\alpha\xi^\alpha=0\Leftrightarrow\tilde{P}_m(\xi)=0. \tag{4.5}$$

Определение 4.1. 1) Ковектор $\xi\in\mathbf{R}^{n*}\setminus 0$, удовлетворяющий уравнению (4.5), называется *характеристической (ко)нормалью уравнения* (0.1) (или *оператора* $P(\partial_x)$ из (0.1)).

2) Множество K всех характеристических нормалей $\xi\in\mathbf{R}^{n*}\setminus 0$ называется *характеристическим конусом оператора* P:

$$K=\{\xi\in\mathbf{R}^{n*}\setminus 0:\ P_m(\xi)=0\}. \tag{4.6}$$

3) Гиперплоскость $\xi_{x_0}^{\perp}\equiv\{v\in T_{x_0}\mathbf{R}^n:\ \langle\xi,v\rangle=0\}$ в $T_{x_0}\mathbf{R}^n$, называется *характеристической плоскостью уравнения* (0.1) в точке x_0, если ковектор $\xi\in\mathbf{R}^{n*}\setminus 0$ является характеристической конормалью уравнения (0.1).

4) *Гиперповерхность* $\mathscr{S}$ класса C^1 в $\mathbf{R}^n$ называется *характеристической* в точке x_0, если ее касательная плоскость в точке x_0 является характеристической, и *характеристикой уравнения* (0.1), если $\mathscr{S}$ характеристическая в каждой своей точке.

Пример 4.1. Плоскость $\{x\in\mathbf{R}^n:(x-x_0)\cdot\xi=0\}$ в $\mathbf{R}^n$ — характеристика, если $\xi\in K$.

Следствие 4.1. Для любой характеристики вида $\{x\in\mathbf{R}^n:(x-x_0)\cdot\xi=0\}$ уравнения (4.2) существуют решения $u(x)$ уравнения (4.2), разрывные на этой плоскости.

Например, $u(x)=\theta((x-x_0)\cdot\xi)$ является функцией вида (4.3), удовлетворяющей (поэтому) уравнению (4.2).

Замечание 4.1. Сделаем в $\mathbf{R}_x^n$ линейную замену координат $x=Cy$. Пусть плоскость $y_n=0$ является при этом характеристикой уравнения (4.2), т. е. ковектор $\xi_0=(C^{-1})^t\ (0,\ldots,0,1)$ является характеристическим. Тогда в новых координатах y символ оператора P_m согласно формуле (2.15) главы 2, равен

$(\tilde{P}_m)_C(\eta)=\tilde{P}_m((C^{-1})^t\eta)$ при $\eta\in\mathbf{R}^n$. Поэтому

$$(\tilde{P}_m)_C(0, \ldots, 0, 1)=\tilde{P}_m(\xi_0)=0. \qquad (4.7)$$

Но $(\tilde{P}_m)_C(0,\ldots,0,1)$ — это коэффициент в операторе $(P_m)_C(\partial_y)$ при $\partial_{y_n}^m u(y)$. Поэтому из (4.7) вытекает, что в новых координатах y уравнение (4.2) имеет вид

$$\sum_{\substack{|\alpha|=m\\ \alpha_n<m}} q_\alpha \partial_y^\alpha u_C(y)=0, \quad y\in\mathbf{R}^n. \qquad (4.8)$$

Отсюда хорошо видно, почему решения уравнения (4.2) могут иметь разрывы вдоль характеристических гиперплоскостей $y_n=\mathrm{const}$. Действительно, уравнение (4.8) не содержит старшую производную $\partial_{y_n}^m$ в направлении, трансверсальном к этим плоскостям, зато каждое слагаемое в (4.8) содержит хотя бы одну производную по касательным переменным $y_1, \ldots, y_{n-1}$. Поэтому уравнению (4.8) удовлетворяет любая функция, постоянная на гиперплоскостях $y_n=\mathrm{const}$, в частности, любая такая разрывная функция.

Пример 4.2. Для волнового оператора (2.6) характеристическое уравнение (4.5) имеет вид

$$\tau^2=a_2|\xi|^2, \quad (\tau, \xi)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^k. \qquad (4.9)$$

Оно определяет коническую поверхность K в $\mathbf{R}^{k+1}$. Плоская волна

$$(u(t, x)=\theta(at-x_1)=\theta(a, -1, 0,\ldots, 0)\cdot(t, x)), \qquad (4.10)$$

где

$$(a, -1, 0,\ldots, 0)\in K,$$

бежит в направлении оси x_1 со скоростью a и ее фронт находится на плоскости

$$F\equiv\{x_1=at\}=(a, -1, 0, \ldots, 0)_0^\perp. \qquad (4.10')$$

Определение 4.2. Оператор $P(\partial_x)$ называется *строго гиперболическим по Петровскому* по переменной x_n, если характеристическое уравнение (4.5) при $\forall\xi'=(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})\in\mathbf{R}^{n-1}\setminus 0$ имеет m различных вещественных корней $\xi_n=\tau_j(\xi')$:

$$P_m(-i\xi)=p_{0,\ldots,0,m)}(-i)^m(\xi_n-\tau_1(\xi'))\ldots(\xi_n-\tau_m(\xi')), \quad \xi\in\mathbf{R}^n, \qquad (4.11)$$

Например, волновое уравнение (2.6) и уравнение (2.7) главы 1 являются гиперболическими по t.

4.2. Волновые фронты, бихарактеристики и распространение особенностей.

Определение 4.3. Через $\mathrm{Char}\,P$ обозначается множество всех характеристических конормалей оператора P, «выходящих» из всевозможных точек $x\in\mathbf{R}^n$:

$$\mathrm{Char}P=\{(x, \xi)\in T^*\mathbf{R}^n\setminus 0^*\colon x\in\mathbf{R}^n, \tilde{P}_m(\xi)=0\}. \qquad (4.12)$$

Здесь $T^*\mathbf{R}^n$ — кокасательное расслоение к $\mathbf{R}^n$, а 0^* — его нулевое сечение. Очевидно, $\mathrm{Char}\, P \approx \mathbf{R}^n \times K$ (см. 4.6)). Например, для волнового оператора (2.6)

$$\mathrm{Char}\,\Box = \mathbf{R}^{k+1} \times K, \text{ где } K = \{(\tau, \xi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^k\colon \tau^2 = a^2 |\xi|^2\}. \quad (4.12')$$

Центральную роль в современных исследованиях особенностей решений дифференциальных уравнений играет понятие волнового фронта обобщенной функции. Для $u(x) \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ *волновой фронт* $\mathrm{WF}(u)$ в точке $x \in \mathbf{R}^n$ это, грубо говоря, множество всех направлений $\xi \in T_x^*\mathbf{R}^n$, по которым $u(x)$ не является гладкой.

Определение 4.3. Точка $(x_0, \xi_0) \in T^*\mathbf{R}^n \setminus 0^*$ не принадлежит $\mathrm{WF}(u)$, если существует такая функция $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, что $\chi(x_0) \neq 0$, и для $\forall N$

$$|\widetilde{\chi u}(\xi)| \leqslant \frac{C_N}{(1+|\xi|)^N} \text{ при } \xi \in \Gamma_N(\xi_0), \quad (4.13)$$

где $\Gamma_N(\xi_0)$ — некоторая коническая окрестность точки ξ_0 в $\mathbf{R}^n$. Соответственно, $\mathrm{WF}(u)$ состоит из всех остальных точек $(x_0, \xi_0) \in T^*\mathbf{R}^n \setminus 0^*$, для которых таких χ и $\Gamma_N(\xi_0)$ нет.

Очевидно, $\mathrm{WF}(u)$ — замкнутое множество в $T^*\mathbf{R}^n \setminus 0$ и

$$\mathrm{sing\,supp}\, u = \pi \mathrm{WF}(u), \quad (4.14)$$

где π — проекция $T^*\mathbf{R}^n$ на $\mathbf{R}^n$.

Смысл понятия волнового фронта раскрывает следующая лемма. Пусть $u \in S'$ — вещественная обобщенная функция, т. е. $\langle u, \bar{\varphi}\rangle = \langle u, \varphi\rangle \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$. Тогда справедлива

Лемма 4.1. Если $(x_0; (1, 0, \ldots, 0)) \notin \mathrm{WF}(u)$, то существует функция $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, для которой $\chi(x_0) \neq 0$, и

$$\chi(x)\, u(x) = v(x_1; x') \in C^\infty\left(\mathbf{R}_{x_1}; \mathscr{D}'\left(\mathbf{R}_{x'}^{n-1}\right)\right), \quad x' \equiv (x_2, \ldots, x_n), \quad (4.15)$$

т. е. $v(x_1; \cdot)$ — гладкая функция от параметра $x_1 \in \mathbf{R}$ со значениями в $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^{n-1})$, и

$$\langle \chi(x)\, u(x), \varphi(x)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle v(x_1; \cdot), \varphi(x_1, \cdot)\rangle\, dx_1 \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n). \quad (4.16)$$

Пример 4.3. Волна u из (4.10) разрывна на фронте F (см. (4.10')) и $\mathrm{WF}(u)$ совпадает с расслоением NF нормалей к F:

$$\mathrm{WF}(u) = NF \equiv \{((x, t), (\xi, \tau)) \in \mathbf{R}^{k+1} \times \mathbf{R}^{k+1} : (x, t) \in F,$$
$$(\xi, \tau) \perp F\}. \quad (4.17)$$

Отметим, что $\mathrm{WF}(u) \subset NF$ очевидно, по определению 4.3, а включение $NF \subset \mathrm{WF}(u)$ вытекает из леммы 4.1.

Пример 4.4. Поскольку $\chi(x)\,\delta(x - x_0) = \chi(x_0)\,\delta(x - x_0)$ и $F(\delta(x - x_0)) = e^{ix_0\xi}$, то

$$\mathrm{WF}(\delta(x - x_0)) = x_0 \times (\mathbf{R}^n \setminus 0). \quad (4.18)$$

Теорема 4.1. ([38], [55]). Если $u\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ — решение уравнения (2.1), то

$$\mathrm{WF}(u)\subset(\mathrm{Char}\,P\cup\mathrm{WF}(f)). \tag{4.19}$$

Грубо говоря, решение $u(x)$ не является гладким в точке x по направлению $\xi\in T_x^*\mathbf{R}^n$ только тогда, когда либо $f(x)$ не гладкая в направлении ξ, либо оператор P «характеристический» в этом направлении.

Пример 4.5. Для волны (4.10)

$$\mathrm{WF}(u)=NF\subset\mathrm{Char}\,\Box=\mathbf{R}^{k+1}\times K. \tag{4.20}$$

Включение здесь вытекает из того, что нормаль к F можно вычислить по формуле $(\tau,\ \xi)=\mathrm{grad}(at-x_1)=(1,\ 0,\ldots,\ 0,\ -a)$, т. е. $\tau=-a$, $\xi=(1,\ 0,\ldots,0)$, откуда следует (4.9). Таким образом, включение (4.19) для волны (4.10) действительно справедливо. Отметим также, что здесь $\mathrm{WF}(f)=\varnothing$, т. к. $f=0$.

Для более тонкой характеризации особенностей решения u уравнения (0.1) служит понятие бихарактеристики уравнения (0.1).

Предположим, что старшая часть P_m уравнения (0.1) имеет вещественные коэффициенты. Рассмотрим *гамильтонову систему* в $T^*\mathbf{R}^n$ с гамильтонианом $H(x,\ \xi)\equiv P_m(\xi)=\tilde{P}_m(i\xi)$:

$$\begin{cases}\dot{x}(s)=H'_\xi=\mathrm{grad}\,P_m(\xi),\\ \dot{\xi}(s)=-H'_x=0,\ s\in\mathbf{R}.\end{cases} \tag{4.21}$$

Очевидно, решения этой системы — прямые

$$\begin{pmatrix}x(s)\\ \xi(s)\end{pmatrix}=\Phi_s\begin{pmatrix}x_0\\ \xi_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+\mathrm{grad}\,P_m(\xi_0)\cdot s\\ \xi_0\end{pmatrix},\quad s\in\mathbf{R};\quad \begin{cases}x_0=x(0)\\ \xi_0=\xi(0).\end{cases} \tag{4.22}$$

Как известно (и хорошо видно из (4.22)), гамильтониан $H(x,\ \xi)=P_m(\xi)$ сохраняется вдоль траекторий (4.22). В частности, множество $\mathrm{Char}\,P$ инвариантно относительно гамильтонова потока Φ_s, $s\in\mathbf{R}$, системы (4.21).

Определение 4.4. *Бихарактеристиками* (или *бихарактеристическими полосками* [43], [49]) уравнения (0.1) называются кривые в $T^*\mathbf{R}^n$ — траектории гамильтоновой системы (4.21), лежащие в $\mathrm{Char}\,P$ (т .е. на которых символ $\tilde{P}_m(\xi)$ обращается в нуль). *Лучи* уравнения (0.1) — это проекции его бихарактеристик при отображении $\pi: T^*\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$.

Теорема 4.2 ([38], [55]). Пусть старшая часть P_m уравнения (0.1) имеет вещественные коэффициенты и пусть P_m является *оператором главного типа*, т. е.

$$\mathrm{grad}\,P_m(\xi)\neq0 \text{ при } P_m(\xi)=0,\ \xi\in\mathbf{R}^n\setminus0. \tag{4.23}$$

Тогда, если $f(x)C^\infty(\mathbf{R}^n)$, то $\mathrm{WF}(u)$ — подмножество в $\mathrm{Char}\,P$, инвариантное относительно гамильтонова потока Φ_s, $s\in\mathbf{R}$, системы (4.21). Иными словами, если $(x_0,\ \xi_0)\in\mathrm{WF}\,(u)$, то $(x_0,\ \xi_0)\in$

$\in \mathrm{Char}\, P$ и вся бихарактеристика (4.22) также содержится в $\mathrm{WF}(u)$.

Грубо говоря, особенности решения $u(x)$ уравнения (0.1) распространяются по бихарактеристикам. Отметим, что условиям теоремы 4.2 удовлетворяют, например, уравнения (2.6), (2.7), (2.10) и (2.11) из главы 1.

Замечание 4.2. При условии (4.23) проекции на $\mathbf{R}^n_x$ бихарактеристик (4.22) уравнения (0.1), т. е. его лучи, являются грубо говоря, пересечениями всех «бесконечно-близких» друг к другу характеристических плоскостей $\xi^{\perp}_{x_0}$ с характеристическими нормалями ξ, близкими к ξ_0. Действительно, если $P_m(\xi_0)=0$ и $\xi_0 \neq 0$, то плоскость $(\xi_0)^{\perp}_{x_0}$ в $\mathbf{R}^n_x$, проходящая через x_0 и ортогональная ξ_0, является, по определению 4.1, характеристической для уравнения (0.1). Поверхность $K \equiv \{\xi \in \mathbf{R}^n : P_m(\xi)=0\}$ является гладкой в точке ξ_0, ввиду (4.23), и вектор $\mathrm{grad}\, P_m(\xi_0)$ ортогонален к $T_{\xi_0}K$. Но K — коническая поверхность, поскольку $P_m(\xi)$ — однородный многочлен. Следовательно, $\xi_0 \in T_{\xi_0}K$, так что $\mathrm{grad}\, P_m(\xi_0) \perp \xi_0$. Это вытекает также из формулы Эйлера: $\xi_0 \cdot \mathrm{grad}\, P_m(\xi_0) = mP_m(\xi_0)=0$. Поэтому

$$\xi \cdot \mathrm{grad}\, P_m(\xi_0) = (\xi - \xi_0) \cdot \mathrm{grad}\, P_m(\xi_0) = O(|\xi - \xi_0|^2) \quad \text{при } \xi \in K \text{ и } \xi \to \xi_0. \tag{4.24}$$

Отсюда вытекает, что

$$\widehat{(\xi^{\perp}_{x_0},\, \mathrm{grad}\, P_m(\xi_0))} = O(|\xi - \xi_0|^2) \text{ при } \xi \in K,\ \xi \to \xi_0, \tag{4.24'}$$

где в левой части стоит угол между характеристической гиперплоскостью $\xi^{\perp}_{x_0}$ с нормалью ξ, близкой к ξ_0, и вектором $\mathrm{grad}\, P_m(\xi_0)$. Остается заметить, что $\mathrm{grad}\, P_m(\xi_0)$ является направляющим вектором проекции бихарактеристики (4.22) на $\mathbf{R}^n_x$, а (4.24') означает, что вектор $\mathrm{grad}\, P_m(\xi_0)$ «лежит в $\xi^{\perp}_{x_0}$ с точностью до $O(|\xi - \xi_0|^2)$» при $\xi \in K$, $\xi \to \xi_0$.

Определение 4.5. Коническая поверхность

$$K_{x_0} = \mathrm{Char}\, P \cap T^*_{x_0}\mathbf{R}^n \tag{4.25}$$

в $T^*_{x_0}\mathbf{R}^n$ называется *характеристическим конусом уравнения* (0.1), в точке x_0; коническая поверхность Q_{x_0} в $T_{x_0}\mathbf{R}^n$, определяемая формулой

$$Q_{x_0} \equiv \{v \in T_{x_0}\mathbf{R}^n : v = s\, \mathrm{grad}\, P_m(\xi),\ \xi \in K_{x_0},\ s \in \mathbf{R}\}, \tag{4.26}$$

называется *характеристическим коноидом* [43], [49] уравнения (0.1) в точке x_0.

Замечание 4.3. Поверхность Q_{x_0} при условии (4.33) образована нормалями к касательным плоскостям поверхности K_{x_0}. Коноид Q_{x_0} является грубо говоря огибающей поверхностью для семейства характеристических гиперплоскостей $\xi^{\perp}_{x_0}$, проходящих через точку x_0. Действительно, из (4.24) вытекает, что $\xi \cdot (\mathrm{grad}\, P_m(\xi_0) -$

$-\operatorname{grad} P_m(\xi)) = O(|\xi-\xi_0|^2)$ при ξ_0, $\xi \in K$ и $\xi_0 \to \xi$, т. е. грубо говоря, $\xi_{x_0}^{\perp}$ касается поверхности Q_{x_0} по прямой $\{s \operatorname{grad} P_m(\xi), s \in \mathbf{R}\} \subset Q_{x_0}$, если $\det \frac{\partial^2 P_m(\xi)}{\partial\xi_i \partial\xi_j} \neq 0$.

Теорема 4.2 допускает обобщение на случай негладких функций $f(x)$.

Теорема 4.2′ ([38], [55]). Если оператор P удовлетворяет условиям теоремы 4.2, то

$$(\mathrm{WF}(u) \setminus \mathrm{WF}(f)) \subset \operatorname{Char} P \tag{4.27}$$

и если $(x_0, \xi_0) \in \mathrm{WF}(u) \setminus \mathrm{WF}(f)$, то $\mathrm{WF}(u)$ содержит также пересечение бихарактеристики (4.22) с компонентой связности открытого множества $T^*\mathbf{R}^n \setminus \mathrm{WF}(f)$ содержащей точку (x_0, ξ_0).

Например, $\mathrm{WF}(\delta) = 0 \times (\mathbf{R}^{n*} \setminus 0)$ согласно (4.18). Поэтому из теоремы 4.2′ для $f(x) = \delta(x)$ вытекает

Следствие 4.2. Пусть оператор P удовлетворяет условиям теоремы 4.2 и $\mathscr{E}(x)$ — любое фундаментальное решение оператора P. Тогда если $(x_0, \xi_0) \in \mathrm{WF}(\mathscr{E}) \setminus [0 \times \mathbf{R}^{n*} \setminus 0)]$ и прямая $\{x_0 + \operatorname{grad} P(\xi_0) \circ s, s \in \mathbf{R}\}$ в $\mathbf{R}^n$ не проходит через точку $x=0$, то она вся содержится в $\operatorname{sing\,supp} \mathscr{E}$. Если же эта прямая проходит через точку $x=0$, то в $\operatorname{sing\,supp} \mathscr{E}$ содержится, по крайней мере, луч, содержащий точку x_0. Таким образом, sing, $\operatorname{supp} \mathscr{E}$ является проекцией на $\mathbf{R}^n$ некоторого семейства бихарактеристик и половин бихарактеристик оператора P.

§ 5. Гладкость решений эллиптических уравнений. Гипоэллиптичность

5.1. Гладкость обобщенных решений эллиптических уравнений.

Определение 5.1. Оператор $P(\partial_x)$ называется *эллиптическим*, если

$$\tilde{P}_m(\xi) \neq 0 \quad \text{при} \quad \xi \in \mathbf{R}^n \setminus 0, \tag{5.1}$$

т. е. оператор $P(\partial_x)$ не имеет (вещественных) характеристик:

$$\operatorname{Char} P = \varnothing. \tag{5.1′}$$

Пример 5.1. *Оператор Лапласа* в $\mathbf{R}^n$ — эллиптический, поскольку $\tilde{\Delta}(\xi) = -|\xi|^2 \neq 0$ при $\xi \in \mathbf{R}^n \setminus 0$. Аналогично, оператор Гельмгольца $H = \Delta + \omega^2$ — эллиптический, поскольку $\tilde{H}_2(\xi) = -|\xi|^2 \neq 0$ при $\xi \in \mathbf{R}^n \setminus 0$.

Оператор Коши—Римана $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ на плоскости $\mathbf{R}^2$ — эллиптический, т. к. его символ $+\frac{1}{2}(-i\xi + \eta) \neq 0$ при $(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^2 \setminus 0$.

Предложение 5.1 ([11], [55]). Порядок m эллиптического оператора $P(\partial_x)$ — четное число, если $n \geqslant 3$.

Отметим, что для операторов $P(\partial_x)$ с вещественными коэффициентами это предложение очевидно при всех $n\geqslant 2$.

Замечание 5.1. При $n=1$ все уравнения вида (0.1) — эллиптические, если только $P(\partial_x)\neq 0$.

Теорема 5.1. *Лемма Вейля*, [38], [70]). Если в уравнении (0.1) оператор $P(\partial_x)$ эллиптический, а $f(x)\in C^\infty(\Omega)$, где Ω — некоторая область в $\mathbf{R}^n$, то также $u(x)\in{}^\infty C(\Omega)$.

Отметим, что $\operatorname{sing\,supp} f=\operatorname{sing\,supp} Pu\subset\operatorname{sing\,supp} u$, а из теоремы 5.1 вытекает обратное включение. Поэтому теорема 5.1 эквивалентна равенству

$$\operatorname{sing\,supp} u=\operatorname{sing\,supp} f \tag{5.2}$$

для эллиптического оператора $P(\partial_x)$.

Замечание 5.2. Если оператор P не эллиптический и, например, однородный, т. е. $P=P_m(\partial_x)$, то равенство (5.2), вообще говоря, не выполняется. Действительно, если $P_m(\xi_0)=0$ для некоторого $\xi_0\in\mathbf{R}^n\setminus 0$, то однородное уравнение $P_m(\partial_x)u(x)=0$, $x\in\mathbf{R}^n$, имеет разрывные решения согласно следствию 4.1.

Замечание 5.3. Теорема 5.1 является частным случаем теоремы 4.1. Действительно, если оператор P эллиптический, то $\operatorname{Char} P=\varnothing$ поэтому из (4.19) вытекает, что

$$\mathrm{WF}(u)=\mathrm{WF}(f). \tag{5.3}$$

Отсюда, ввиду (4.14), получаем (5.2).

5.2. Гипоэллиптические операторы. Оказывается, равенство (5.2) выполняется не только для эллиптических операторов.

Определение 5.2. Оператор $P(\partial_x)$ называется *гипоэллиптическим*, если для любого решения $u(x)$ уравнения (0.1) справедливо равенство (5.2). Иначе: из гладкости $f(x)$ в некоторой области $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ следует гладкость решения уравнения (0.1) в той же области.

Гипоэллиптичность оператора $P(\partial_x)$ оказывается связана с достаточной удаленностью комплексных нулей символа $\tilde{P}(z)$ от вещественного пространства. А именно, обозначим

$$K_{\mathbf{C}}(P)\equiv\{z\in\mathbf{C}^n:\tilde{P}(z)=0\}. \tag{5.4}$$

Теорема 5.2 ([37], [69]). Оператор $P(\partial_x)$ гипоэллиптический тогда и только тогда, когда на алгебраическом многообразии (5.4)

$$|\operatorname{Im} z|\geqslant A|\operatorname{Re} z|^\varkappa - B \text{ при некоторых } A>0,\ B,\ \varkappa\in\mathbf{R}, \tag{5.5}$$

или, что эквивалентно,

$$|\operatorname{Im} z|\to\infty \text{ при } z\in K_c(P) \text{ и } |\operatorname{Re} z|\to\infty. \tag{5.5'}$$

Оказывается, возможно охарактеризовать гипоэллиптические операторы также по поведению их символа в вещественной области:

Теорема 5.3 ([37], [69]). Гипоэллиптичность оператора $P(\partial_x)$ эквивалентна каждому из следующих двух условий:

$$\lim_{|\xi|\to\infty}\frac{\widetilde{P}(\xi+\theta)}{\widetilde{P}(\xi)}=1 \quad \text{при } \forall\theta\in\mathbf{R}^n; \tag{5.6}$$

$$\lim_{|\xi|\to\infty}\frac{\partial_{\xi_j}\widetilde{P}(\xi)}{\widetilde{P}(\xi)}=0 \text{ при } \forall j=1, \ldots, n. \tag{5.6'}$$

Гипоэллиптичность также просто связана с гладкостью фундаментальных решений.

Если оператор P гипоэллиптичен, то, по определению 5.2, любое его фундаментальное решение $\mathscr{E}(x)$ — гладкое при $x\neq 0$, т. к. $\delta(x)$ — гладкая при $x\neq 0$: $\delta(x)=0$ при $x\neq 0$.

Из леммы 2.2 главы 1 следует, что верно и обратное.

Теорема 5.4. Если уравнение (0.1) имеет хотя бы одно фундаментальное решение $\mathscr{E}(x)$, гладкое при $x\neq 0$, то оператор $P(\partial_x)$ гипоэллиптичен.

Доказательство. Пусть $f(x)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ и $f|_\Omega\in C^\infty(\Omega)$, где Ω — область в $\mathbf{R}^n$. Возьмем любую точку $x_0\in\Omega$ и функции φ, $\hat{\varphi}$ и $\hat{\hat{\varphi}}$ такие, как в формуле (2.18) главы 1, и $\omega\subset\operatorname{supp}\hat{\varphi}\subset\Omega$. Тогда из формулы (2.21) главы 1 следует, что

$$u(x)=(\mathscr{E}*\hat{\varphi}f)(x)-(\mathscr{E}*Pw)(x) \quad \text{при } x\in\omega.$$

Отсюда вытекает, что $u(x)\in C^\infty$ при $x\in\omega$. Действительно, $\hat{\varphi}f\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ и, согласно формуле (1.58) главы 1,

$$\operatorname{sing\,supp}\mathscr{E}*Pw\subset\{0\}+\operatorname{supp}w=\operatorname{supp}w,$$

а $\operatorname{supp}w$ не пересекается с ω.

Следствие 5.1. При $n=1$ все операторы $P\neq 0$ вида (0.1) являются гипоэллиптическими, поскольку все фундаментальные решения (2.15) главы 1 — гладкие при $x\neq 0$.

Глава 4

ФУНКЦИЯ P_+^λ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ К ПОСТРОЕНИЮ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

В этой главе мы сначала в §§ 1, 2 изучим аналитическое продолжение функции P_+^λ для многочленов $P(x)$ второго (и первого) порядка. Затем при помощи этого аналитического продолжения мы построим в §§ 3—5 фундаментальные решения для уравнений второго порядка с невырожденной квадратичной формой произвольной сигнатуры с любым числом независимых переменных.

В частности, будут получены все фундаментальные решения (2.6′), (2.7′), (2.10′) и (2.11′) главы 1. Построенные в §§ 3—5 фундаментальные решения являются инвариантными относительно группы ортогональных преобразований, сохраняющих главную часть уравнения: они являются функциями от «радиуса» в (вообще говоря) индефинитной метрике, связанной с уравнением. В частности, фундаментальные решения (2.7′) главы 1 уравнения Клейна—Гордона (2.7) главы 1 оказываются аналитическим продолжением бесселевых функций от интервала Лоренца по номеру бесселевой функции.

§ 1. Функция P_+^λ в случае, когда P — вещественная линейная функция

1.1. Аналитическое продолжение по λ. Если $P(x)=p_1x_1+\ldots$ $\ldots+p_nx_n+p_0$ и $P(x)\not\equiv\mathrm{const}$, то, произведя аффинную замену переменных, можно считать, что $P(x)=x_1$. Поэтому остается рассмотреть одномерный случай, когда $n=1$, и (см. формулу (2.10) главы 1)

$$\langle P_+^\lambda(x), \varphi(x)\rangle = \langle x_+^\lambda, \varphi(x)\rangle \equiv$$

$$\equiv\int\limits_0^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx \quad \forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}),\quad \operatorname{Re}\lambda>-1, \tag{1.1}$$

Этот интеграл сходится и аналитически зависит от λ при $\operatorname{Re}\lambda>$ >-1.

Теорема 1.1. Функция $\lambda\to x_+^\lambda$, голоморфная как отображение области $\operatorname{Re}\lambda>-1$ в $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$, продолжается до мероморфной в смысле [18] функции от $\lambda\in\mathbf{C}$ со значениями в $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$. Она имеет простые полюса в точках $\lambda=-1, -2, \ldots$ и вычеты

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-k} x_+^\lambda=\frac{(-1)^{k-1}\,\delta^{(k-1)}(x)}{(k-1)!},\quad k=1, 2, \ldots. \tag{1.2}$$

Доказательство. Вычитая из $\varphi(x)$ ряд Тейлора с центром в $x=0$ получаем при $\operatorname{Re}\lambda>-1$ для $\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$

$$\langle x_+^\lambda, \varphi(x)\rangle=\int\limits_0^\infty x^\lambda\varphi(x)dx=\int\limits_0^1 x^\lambda\Big[\varphi(x)-\varphi(0)-\ldots$$

$$\ldots-\frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}x^{k-1}\Big]dx+\int\limits_1^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx+\varphi(0)\int\limits_0^1 x^\lambda\,dx+\ldots$$

$$\ldots+\varphi^{(k-1)}(0)\int\limits_0^1\frac{x^{\lambda+k-1}}{(k-1)!}\,dx. \tag{1.3}$$

Интегралы $\int\limits_0^1\ldots$ легко вычисляются:

$$\int_0^1 \frac{x^{\lambda+k-1}}{(k-1)!}\,dx = \frac{1}{(\lambda+k)(k-1)!}, \quad \operatorname{Re}\lambda > -k. \tag{1.4}$$

Очевидно, первый интеграл в правой части (1.3) — голоморфная функция при $\operatorname{Re}\lambda > -k-1$, второй интеграл — при всех $\lambda \in \mathbf{C}$, а сумма остальных имеет простые полюсы в точках $\lambda = -k$ с вычетами $\varphi^{(k-1)}(0)/(k-1)!$.

Другое доказательство: при $\operatorname{Re}\lambda > -1$

$$\langle x_+^\lambda, \varphi(x)\rangle = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\,dx = -\int_0^\infty \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}\varphi'(x)\,dx = \ldots$$

$$\ldots = (-1)^k \int_0^\infty \frac{x^{\lambda+k}}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)}\varphi^{(k)}(x)\,dx. \tag{1.5}$$

Следовательно, функция

$$\langle (\lambda+1)\ldots(\lambda+k)\,x_+^\lambda, \varphi(x)\rangle = (-1)^k \int_0^\infty x^{\lambda+k}\varphi^{(k)}(x)\,dx \tag{1.6}$$

голоморфна по λ при $\operatorname{Re}\lambda > -k-1$, и

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-k} \langle x_+^\lambda, \varphi(x)\rangle = \frac{(-k)^k \int_0^\infty \varphi^{(k)}(x)\,dx}{(-k+1)\ldots(-1)} = \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}. \tag{1.7}$$

Следствие 1.1. Сделаем в x_+^λ подстановку $x = h(y) = |y|^2 - \omega^2$, где $y \in \mathbf{R}^n$, $\omega \in \mathbf{R}\setminus 0$. Поскольку $\operatorname{sing\,supp} x_+^\lambda = \{0\}$, а $\operatorname{grad} h(y) \neq 0$ при $|y|^2 = \omega^2$, то $(h(y))_+^\lambda = (|y|^2 - \omega^2)_+^\lambda \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ в силу замечания 1.4 главы 1. Кроме того, отображение $u(x) \mapsto u(h(y))$ непрерывно по u в классе функций $u(x)$ с $\operatorname{sing\,supp} u \not\ni 0$ в соответствующей сходимости. Поэтому $(|y|^2 - \omega^2)_+^\lambda$ — мероморфная функция от $\lambda \in \mathbf{C}$ с простыми полюсами в $\lambda = -1, -2, \ldots$ и вычетами

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-k} (|y|^2 - \omega^2)_+^\lambda = \frac{(-1)^k \delta^{(k-1)}(|y|^2 - \omega^2)}{(k-1)!}, \quad y \in \mathbf{R}^n. \tag{1.8}$$

1.2. Применение к бесселевым функциям. По определению [47], [70] при $\nu \in \mathbf{C}$

$$J_\nu(z) = \sum_0^\infty (-1)^r \frac{z^{2r+\nu}}{2^{2r+\nu} r!\,\Gamma(\nu+r+1)}, \quad \arg z \in]-\pi, \pi[, \tag{1.9}$$

определим как аналитическое продолжение из области $\operatorname{Re}\nu > 0$

$$J_\nu(x_+) = \sum (-1)^r \frac{x_+^{2r+\nu}}{2^{2r+\nu} r!\,\Gamma(\nu+r+1)}, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{1.10}$$

Каждое слагаемое $\dfrac{x_+^{2r+\nu}}{\Gamma(\nu+r+1)}$ при $r=0, 1, \ldots$ — голоморфная функция от $\nu\in\mathbf{C}$ со значениями в $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ по теореме 1.1. При целых $\nu=-1, -2, \ldots$

$$\frac{x_+^{2r+\nu}}{\Gamma(\nu+r+1)}=\begin{cases}\dfrac{(-1)^r\delta^{(k-1)}(x)}{(k-1)!} & \text{при } 2r+\nu=-k=-1, -2, \ldots;\\ 0 \text{ при } 2r+\nu\geqslant 0, \ \nu+r+1=0, -1, -2, \ldots, & \\ \text{т. е. при } -2r\leqslant\nu\leqslant -r-1. & \end{cases}$$

Поэтому при $l=1, 2, \ldots$ для $\nu=-l$

$$J_{-l}(x_+)=2^l\sum_{0\leqslant 2r<l}\frac{(-1)^{l-r-1}\delta^{(l-2r-1)}(x)}{2^{2r}r!\,(l-2r-1)!}+(-1)^l J_l(x_+). \quad (1.12)$$

§ 2. Функция P_+^λ для случая, когда $P(x)$ — квадратичная форма типа $(m, n-m)$ с вещественными коэффициентами

Пусть $P(x)=B(x)$ — невырожденная квадратичная форма в $\mathbf{R}^n$ с вещественными коэффициентами. Линейной заменой координат она приводится к виду

$$B(x)=x_1^2+\ldots+x_m^2-x_{m+1}^2-\ldots-x_n^2, \quad (2.1)$$

где $0\leqslant m\leqslant n$. Покажем, что $P_+^\lambda(x)$ аналитична при $\operatorname{Re}\lambda>-1$ со значениями в $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ и продолжается до мероморфной функции от $\lambda\in\mathbf{C}$. Если $m=0$, то $B_+^\lambda(x)\equiv 0$. При $m\neq 0$ нужно различать два случая: $m=n$ и $1\leqslant m\leqslant n-1$. Дело в том, что при $m=n$ множество $B(x)=0$ состоит из одной точки $x=0$, а при $1\leqslant m\leqslant n-1$ это множество является конической поверхностью $Q\subset\mathbf{R}^n$, гладкой вне вершины $x=0$.

Замечание 2.1. При $m=n$ функция $B_+^\lambda(x)=|x|$ в области $x\neq 0$ — голоморфная функция от $\lambda\in\mathbf{C}$ со значениям в $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n\setminus\{0\})$. В случае $1\leqslant m\leqslant n$ при $x\neq 0$ очевидно $\operatorname{grad} B(x)\neq 0$, поэтому B_+^λ можно представить как суперпозицию $(\cdot)_+^\lambda$ и $B(x)$:

$$B_+^\lambda(x)=(B(x))_+^\lambda, \quad x\neq 0. \quad (2.2)$$

Следовательно, $B_+^\lambda(x)|_{x\neq 0}$, по теореме 1.1, — мероморфная функция от $\lambda\in\mathbf{C}$ со значениями в $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n\setminus\{0\})$ и вычетами (см. (1.2))

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-k} B_+^\lambda(x)=\frac{(-1)^{k-1}\delta^{(k-1)}(B(x))}{(k-1)!}, \quad x\neq 0, \quad k=1, 2, \ldots \quad (2.3)$$

2.1. Случай, когда $m=n$. В этом случае $B_+(x)=|x|^2$ и $B_+^\lambda(x)=|x|^{2\lambda}$. Мы изучим $|x|^\lambda$, а для $|x|^{2\lambda}$ все результаты получаются простым пересчетом. В сферических координатах $x=r\omega$, где $|\omega|=1$, $r=|x|>0$. Для $\varphi(x)\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ при $\operatorname{Re}\lambda>-n$ сходится интеграл

$$\langle |x|^\lambda, \varphi(x)\rangle = \int_0^\infty r^{\lambda+n-1}\bar{\varphi}(r)\,dr = \langle r_+^{\lambda+n-1}, \bar{\varphi}(r)\rangle, \quad (2.4)$$

где

$$\bar{\varphi}(r) = \int_{|\omega|=1} \varphi(r\omega)\,d\omega.$$

Разлагая $\varphi(x)$ в ряд Тейлора в точке $x=0$, мы видим, что $\bar{\varphi}(r)$ при $r\to 0$ разлагается в ряд только по четным степеням r: $r^0, r^2, \ldots$. Следовательно, по теореме 1.1, интеграл (2.4) имеет полюса лишь при $\lambda+n-1=-1, -3, \ldots, -1-2k, \ldots$ $\ldots$ ($k=0, 1, 2, \ldots$) с вычетами (см. [18])

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-n-2k} \langle |x|^\lambda, \varphi\rangle = \frac{\bar{\varphi}^{(2k)}(0)}{(2k)!} = \Omega_n \frac{\Delta^k\varphi(0)}{2^k k!\, n\ldots(n+2k-2)}, \quad (2.5)$$

где Ω_n — площадь сферы $|x|=1$ в $\mathbf{R}^n$.

Отметим, что последнее равенство очевидно для $k=0$.

Из (2.5) вытекает, что $|x|^\lambda$ — мероморфная функция от $\lambda\in\mathbf{C}$ со значениями в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ с простыми полюсами при $\lambda=-n-2k$, $k=0, 1, 2, \ldots$ и вычетами

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-n-2k} |x|^\lambda = \Omega_n \frac{\Delta^k\delta(x)}{2^k k!\, n\ldots(n+2k-2)}. \quad (2.6)$$

В частности, при $k=0$

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-n} |x|^\lambda = \Omega_n\delta(x). \quad (2.7)$$

Таким образом, все вычеты функции $|x|^\lambda$ сосредоточены в точке $x=0$. Отметим важный для дальнейшего случай $n=1$:

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-1-2k} |x|^\lambda = 2\frac{\delta^{(2k)}(x)}{2^k k!\,(2k-1)!}, \quad k=0, 1, 2, \ldots. \quad (2.8)$$

Из доказанного следует

Теорема 2.1. При $m=n$ обобщенная функция $B^\lambda = |x|^{2\lambda}$ — мероморфная функция от $\lambda\in\mathbf{C}$ со значениями в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ с простыми полюсами в точках $\lambda=\frac{n}{2}-k$ и вычетом в точке $\lambda=-\frac{n}{2}$, равным

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-\frac{n}{2}} B^\lambda = \frac{\Omega_n}{2}\delta(x). \quad (2.7')$$

2.2. Применение к разложению δ-функции на плоские волны. Возьмем $a(x)=|\omega\cdot x|$, где $\omega\in\mathbf{R}^n\setminus 0$, и $\omega\cdot x=\omega_1x_1+\ldots$ $\ldots+\omega_nx_n$ — «плоская волна». Тогда

$$a_+^\lambda(x) = |\omega\cdot x|^\lambda \tag{2.9}$$

при $\operatorname{Re}\lambda > -1$ есть результат подстановки $y=\omega\cdot x$ в функцию $|y|^\lambda$, $y\in\mathbf{R}$. Поскольку $\operatorname{grad} y \equiv \omega \neq 0$, то из (2.8) следует, что $|\omega\cdot x|^\lambda$ из области $\operatorname{Re}\lambda > -1$ продолжается до мероморфной функции от $\lambda\in\mathbf{C}$ со значениями в $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ с простыми полюсами в точках $\lambda=-1-2k$, $k=0, 1, 2, \ldots$ и вычетами

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-1-2k} |\omega\cdot x|^\lambda = 2\,\frac{\delta^{(2k)}(\omega\cdot x)}{2^k k!\,(2k-1)!}, \tag{2.10}$$

сосредоточенными на гиперплоскости $\omega\cdot x=0$.

Осредним (2.9) по сфере $|\omega|=1$: при $\operatorname{Re}\lambda>-1$

$$\int\limits_{|\omega|=1} |\omega\cdot x|^\lambda d\omega = C(\lambda, n)\, r^\lambda,$$

где

$$C(\lambda, n) = 2\pi^{\frac{n-1}{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)} \tag{2.11}$$

(см. [18]). Отсюда

$$\frac{1}{\pi^{\frac{n-1}{2}}}\int\limits_{|\omega|=1} \frac{|\omega\cdot x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\,d\omega = \frac{2\,|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}. \tag{2.12}$$

Обе части равенства (2.12), ввиду (2.6) и (2.10), продолжаются до аналитических функций от $\lambda\in\mathbf{C}$. Поэтому из их совпадения при $\operatorname{Re}\lambda>-1$ следует, что они совпадают и при всех $\lambda\in\mathbf{C}$. При этом левую часть нужно понимать как интеграл от функции параметра ω со значениями в $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$.

При $\lambda=-n$ из (2.12) и (2.6) получаем

$$\frac{1}{\pi^{\frac{n-1}{2}}}\int\limits_{|\omega|=1} \left(\frac{|\omega\cdot x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\right)\Bigg|_{\lambda=-n} d\omega = \Omega_n\delta(x). \tag{2.13}$$

Это есть разложение δ-функции на плоские волны, имеющее важные приложения (см. [18]).

2.3. Случай $1\leqslant m\leqslant n-1$. В биполярных координатах $(x_1, \ldots, x_m)=r\omega_m$, $(x_{m+1}, \ldots, x_n)=\rho\theta_{n-m}$, где $r, \rho>0$, $|\omega_m|=|\theta_{n-m}|=1$, получаем $B(x)=r^2-\rho^2$. Поэтому при $\operatorname{Re}\lambda>-1$ для $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$

$$\langle B_+^\lambda(x), \varphi(x)\rangle = \int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^r (r^2-\rho^2)^\lambda\overline{\varphi}(r, \rho)\,\rho^{n-m-1}d\rho\right) r^{m-1}dr, \tag{2.14}$$

где

$$\overline{\varphi}(r, \rho)=\int\limits_{|\omega_m|=|\theta_{n-m}|=1} \varphi(r\omega_m, \rho\theta_{n-m})\, d\omega_m d\theta_{n-m}. \tag{2.15}$$

Как и выше, $\overline{\varphi}(r, \rho)$ при $r\to 0$ или $\rho\to 0$ разлагается в ряд лишь по четным степеням r и ρ.

После замены $\rho=\tau r$, $1-\tau=s$, получаем

$$\langle B_+^\lambda, \varphi\rangle=\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^1 (1-\tau^2)^\lambda r^{2\lambda}\overline{\varphi}(r, \tau r)\, r^{n-1}\tau^{n-m-1}d\tau\right)dr=$$

$$=\int\limits_0^1 s^\lambda\left[(2-s)^\lambda\int\limits_0^\infty r^{2\lambda+n-1}\overline{\varphi}(r, (1-s)\, r)(1-s)^{n-m-1}dr\right]ds=$$

$$=\int\limits_0^1 s^\lambda\left[\int\limits_0^\infty r^{2\lambda+n-1} I(r, s, \lambda)\, dr\right]ds=$$

$$=\langle s_+^\lambda, \langle r_+^{2\lambda+n-1}, I(r, s, \lambda)\rangle\rangle, \tag{2.16}$$

где

$$I(r, s, \lambda)=(r-s)^\nu\,\overline{\varphi}(r, (1-s)\, r)\,(1-s)_+^{n-m-1}. \tag{2.16'}$$

Из теоремы 1.1 вытекает, что здесь внутренний интеграл (по r)—мероморфная функция от $\lambda\in\mathbb{C}$ с простыми полюсами при $2\lambda+n-1=-1, -3, \ldots, -1-2j, \ldots$ $(j=0, 1, \ldots)$, т. е. при $\lambda=\lambda_j^0=-\frac{n}{2}-j$, поскольку $I(r, s, \lambda)$ при $r\to 0$ разлагается в ряд Тейлора лишь по четным степеням r. Поэтому обозначая $\mathscr{P}^0=\left\{-\frac{n}{2}-j : j=0, 1, \ldots\right\}$, получаем:

$$\langle B_+^\lambda, \varphi\rangle=\langle s_+^\lambda, \sum_{\substack{\lambda_j^0\in\mathscr{P}^0\\ \lambda_j^0>-N}}\frac{\partial_r^{2j} I(0+, s, \lambda)}{(2j)!\, 2\left(\lambda-\lambda_j^0\right)}+R_N(s, \lambda)\rangle, \tag{2.17}$$

где $\partial_r^{2j} I(0+, s, \lambda)$ и $R_N(s, \lambda)$—гладкие функции от $s\in[0, 1]$, голоморфные по λ при $\operatorname{Re}\lambda>-N$. Применяя к (2.17) повторно теорему 1.1 (точнее, метод доказательства этой теоремы), получаем, что

$$\langle B_+^\lambda, \varphi\rangle=\sum_{\substack{\lambda_i^Q\in\mathscr{P}^Q\\ \lambda_i^Q>-N}}\left(\sum_{\substack{\lambda_j^0\in\mathscr{P}^0\\ \lambda_j^0>-N}}\frac{\partial_s^{i-1}\partial_r^{2j} I(0+, 0, \lambda)}{2\,(i-1)!\,(2j)!\left(\lambda-\lambda_i^Q\right)\left(\lambda-\lambda_j^0\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial_s^{i-1}R_N(0+, \lambda)}{(i-1)!\left(\lambda-\lambda_i^Q\right)}\right)+R_{NN}(\lambda), \tag{2.18}$$

где $\lambda_i^Q = -i$, $\mathcal{P}^Q = \{-1, -2, \ldots\}$, а $R_{NN}(\lambda)$ — голоморфная функция при $\operatorname{Re}\lambda > -N$.

Отсюда видно, что B_+^λ — мероморфная функция от $\lambda \in \mathbf{C}$ с полюсами в точках $\lambda \in \mathcal{P}^Q \cup \mathcal{P}^0$, простыми при $\lambda \notin \mathcal{P}^Q \cap \mathcal{P}^0$. Вычеты функции B_+^λ в полюсах $\lambda \in \mathcal{P}^Q \setminus \mathcal{P}^0$ сосредоточены при $s=0$, т. е. при $\rho = r$, или иначе — на «конусе» $Q = \{x \in \mathbf{R}^n : B(x) = 0\}$, а вычеты в $\lambda \in \mathcal{P}^0 \setminus \mathcal{P}^Q$ — при $r=0$, т. е. при $\rho=0$ и $\tau = 1-s \in [0, 1]$, или иначе — в вершине $x=0$ «на всех угловых направлениях $\tau \in [0, 1]$» (на которых $B(x) > 0$). В точках $\lambda_n \in \mathcal{P}^Q \cap \mathcal{P}^0$ полюсы, вообще говоря, имеют второй порядок: первый вычет сосредоточен на конусе Q (в том числе и в вершине $x=0$), а второй вычет $\left(\text{т. е. коэффициент при } \frac{1}{(\lambda-\lambda_n)^2}\right)$ сосредоточен в вершине $x=0$ конуса Q. Из сказанного выводится (см. [18])

Теорема 2.2. 1) При $1 \leqslant m \leqslant n-1$, $n \geqslant 2$ функция $\dfrac{B_+^\lambda(x)}{\Gamma(\lambda+1)}$ — голоморфная функция от $\lambda \in \mathbf{C}$ со значениями в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n \setminus 0)$ и мероморфная функция от $\lambda \in \mathbf{C}$ со значениями в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$.

2) Она имеет лишь простые полюса, расположенные в точках

$$\lambda \in \mathcal{P}^0 = \left\{-\frac{n}{2} - j : j = 0, 1, 2, \ldots\right\}. \tag{2.19}$$

Вычеты сосредоточены в вершине $x=0$; вычет в «первом» полюсе $\lambda = -\frac{n}{2}$ пропорционален $\delta(x)$:

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-\frac{n}{2}} \frac{B_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} = \Omega_{m,n-m}\delta(x), \quad 1 \leqslant m \leqslant n-1, \quad n \geqslant 2; \tag{2.20}$$

$$\Omega_{m,n-m} = $$

$$= \frac{1}{2}\Omega_m \cdot \Omega_{n-m} \left\langle \frac{s_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}, (2-s)^\lambda (1-s)_+^{\frac{n-m-1}{}} \right\rangle \Big|_{\lambda=-\frac{n}{2}}. \tag{2.21}$$

3) Значения $\dfrac{B_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$ при $\lambda \in \mathcal{P}^Q = \{-1, -2, \ldots\}$ — обобщенные функции, сосредоточенные на конусе Q:

$$\frac{B_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\Big|_{\lambda=-k} = \frac{\delta^{(k-1)}(B(x))}{(k-1)!}, \quad x \neq 0, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{2.22}$$

Действительно, (2.22) вытекает из (2.3). Формула (2.20) вытекает из (2.17), (2.16):

$$\left\langle \operatorname*{res}_{\lambda=-\frac{n}{2}} \frac{B_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}, \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{s_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}, \frac{I(0+, s, \lambda)}{2} \right\rangle \Big|_{\lambda=-\frac{n}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\langle \frac{s_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}, (2-s)^\lambda \overline{\varphi}(0, 0)(1-s)_+^{n-m-1} \right\rangle \Big|_{\lambda=-\frac{n}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \Omega_m \Omega_{n-m} \varphi(0) \left\langle \frac{s_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}, (2-s)^\lambda (1-s)_+^{n-m-1} \right\rangle \Big|_{\lambda=-\frac{n}{2}}. \quad (2.23)$$

Пример 2.1. Для случая, когда $n=4$, $m=1$ и $B(x)= =x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2$ — интервал Лоренца, из (2.21) и (1.2) получаем

$$\Omega_{1,3} = 4\pi(-[(2-s)^{-2}(1-s)_+^2]')|_{s=0} = \pi. \quad (2.24)$$

Аналогично, для $n=2$, $m=1$ и $B(x)=x_1^2-x_2^2$

$$\Omega_{1,1} = \frac{1}{2} 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1. \quad (2.24')$$

2.4. Применение к бесселевым функциям. Аналогично (1.10), для квадратичной формы $B(x)$ из (2.1) и функции $H_\nu(z) \equiv \equiv z^\nu J_\nu(z)$, $\arg z \in]-\pi, \pi[$, определим суперпозицию с $\sqrt{B_+(x)}$ для $\operatorname{Re}\nu > 0$ как функцию

$$H_\nu(\sqrt{B_+(x)}) = B_+^{\nu/2} J_\nu(\sqrt{B_+}) \equiv \sum_0^\infty \frac{(-1)^r B_+^{r+\nu}(x)}{2^{2r+\nu} r! \Gamma(\nu+r+1)}, \quad x \in \mathbf{R}^n. \quad (2.25)$$

При $\operatorname{Re}\nu > 0$ — это непрерывная функция от $x \in \mathbf{R}^n$. При $\operatorname{Re}\nu \leqslant 0$ определим ее аналитическим продолжением по ν как функцию от ν со значениями в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$.

Согласно теореме 2.2, здесь каждое слагаемое $\frac{B_+^{r+\nu}(x)}{\Gamma(\nu+r+1)}$ — голоморфная функция от $\nu \in \mathbf{C}$ со значениями в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$, и мероморфная функция от $\nu \in \mathbf{C}$ со значениями в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ с простыми полюсами при $r+\nu \in \mathcal{P}^0 = \left\{-\frac{n}{2} - j : j = 0, 1, 2, \ldots\right\}$. Ее вычет в точке $\nu = -r - \frac{n}{2}$ равен (2.20):

$$\operatorname*{res}_{\nu=-r-\frac{n}{2}} \frac{B_+^{r+\nu}}{\Gamma(\nu+r+1)} = \Omega_{m,n-m}\delta(x), \quad 1 \leqslant m \leqslant n-1, \ n \geqslant 2. \quad (2.26)$$

Отсюда вытекает

Теорема 2.3. $H_\nu(\sqrt{B_+(x)})$ — мероморфная функция от $\nu \in \mathbf{C}$ со значениями в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, с простыми полюсами при $\nu \in \mathcal{P}^0$.

Формулы (2.26) будут использованы в следующих §§ 4, 5 при вычислении фундаментальных решений дифференциальных уравнений (0.1) второго порядка. В частности, для волнового уравнения и уравнения Клейна—Гордона в $\mathbf{R}^k$ (при этом $n= =k+1$, $m=1$).

Отметим, что, аналогично (1.12), при $l=1, 2, \ldots$ для $\nu=-l$

$$H_{-l}(\sqrt{B_+(x)})=2^l\sum_{0\leqslant r\leqslant l-1}\frac{(-1)^{lr}\,\delta^{(l-r-1)}(B(x))}{2^{2r}r!\,(l-r-1)!}+$$

$$+(-1)^l B_+^{-\frac{l}{2}}J_l(\sqrt{B_+}),\quad x\neq 0, \tag{2.27}$$

Замечание 2.1. Формулы (2.22) и (2.27) справедливы лишь при $x\neq 0$. Чтобы формула (2.22) была справедливой при «всех» $x\in\mathbf{R}$, нужно правильным образом регуляризовать $\delta^{(k-1)}(B(x))$ в точке $x=0$. Такая регуляризация возможна в (2.22) лишь в тех случаях, когда $\lambda=-k\notin\mathcal{P}^0=\{-\frac{n}{2}-j : j=0, 1, 2, \ldots\}$, т. е. когда левая часть (2.22) имеет смысл. Тогда правую часть (2.22), по определению, нужно считать равной левой части. Равенство (2.27) при такой регуляризации $\delta^{(l-r-1)}(B(x))$ также будет справедливым, как видно из вывода формулы (2.27), если

$$-l+r\notin\mathcal{P}^0 \text{ при } r=0, 1, 2, \ldots, l-1. \tag{2.28}$$

Это условие выполняется, если, например, n — нечетное или

$$1\leqslant l<\frac{n}{2}\ . \tag{2.29}$$

Итак, для $k\neq\frac{n}{2}+j$, $j=0, 1, \ldots$, нужно задать регуляризацию $\delta^{(k-1)}(B(x))$, используя формулу (2.22): ввиду (2.16), для $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$

$$\left\langle \frac{(-1)^{k-1}\,\delta^{(k-1)}(B(x))}{(k-1)!}, \varphi(x)\right\rangle \equiv \left\langle \frac{B_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\Big|_{\lambda=-k}, \varphi\right\rangle =$$

$$=\left\langle \operatorname*{res}_{\lambda=-k} B_+^\lambda, \varphi\right\rangle =\frac{1}{(k-1)!}\left(\left(\frac{d}{ds}\right)^{k-1}\langle r_+^{-2k+n-1}, I(r, s, \lambda)\rangle\right)\Big|_{s=0}. \tag{2.30}$$

Отметим, что при таких k

$$\langle r_+^{-2k+n-1}, I(r, s, \lambda)\rangle =$$

$$=(2-s)^{-k}\int_0^\infty r^{-2k+n-1}\bar{\varphi}(r, (1-s)r)(1-s)^{n-k-1}\,dr \tag{2.31}$$

— сходящийся интеграл, поскольку $-2k+n>0$.

В частности, для $k=1$ и $n\geqslant 3$ формула (2.22) справедлива, если положить, в соответствии с (2.30) и (2.31),

$$\langle \delta(B(x), \varphi(x)\rangle =\frac{1}{2}\int_0^\infty r^{n-3}\bar{\varphi}(r, r)\,dr. \tag{2.32}$$

Отметим, что при $n\geqslant 3$ и $k=1$ выполняется условие (1.24) главы 1 и выражение (2.32) соответствует формуле (1.22) главы 1, т. е. согласуется с «обычной» практикой вычислений с δ-функцией как с единичной мерой. А именно, пользуясь формулой (1.25) главы 1 получаем, как в формуле (1.26) главы 1

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(B(x))\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} r^{n-2}\delta(r^2-\rho^2)\varphi(x)\frac{d^n x}{r^{m-1}\rho^{n-m-1}} =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty r^{n-2}\frac{1}{2r}\delta(r-\rho)\overline{\varphi}(r,\rho)\,dr\,d\rho = \frac{1}{2}\int_0^\infty r^{n-3}\overline{\varphi}(r,r)\,dr. \quad (2.33)$$

Отметим, что для $k=1$ такое совпадение с «обычными» методами имеет место лишь при $n\geqslant 3$ (как в примере 1.11 главы 1). При $n=2$ интеграл (2.32) расходится и формула (2.22) не может быть справедливой, поскольку ее левая часть не существует. Отметим также, что при условии (2.29) формула (2.22) также справедлива при «обычной» методике вычислений с производными δ-функции, поскольку все возникающие при этом интегралы сходятся. Например, для $l=2$ условие (2.29) выполняется при $n\geqslant 4$ и т. д. Мы воспользуемся ниже формулами (2.22) и (2.27) в случае $m=1$, $n=4$ и $k=1$, $l=1$, когда условие (2.29) выполнено:

$$\left.\frac{B_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right|_{\lambda=-1} = \delta(B(x)), \quad x\in\mathbb{R}^4, \quad (2.34)$$

$$H_{-1}(\sqrt{B_+(x)}) = -\delta(B(x)) - B_+^{-1/2}(x)\,J_1(\sqrt{B_+(x)}), \quad x\in\mathbb{R}^4. \quad (2.35)$$

Отметим также, что в этом случае $B(x)=x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2$ — интервал Лоренца, и из (2.20) и (2.24), (2.25) вытекают формулы

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-2}\frac{B_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} = \pi\delta(x) \Rightarrow \operatorname*{res}_{\nu=-2} H_\nu(\sqrt{B_+(x)}) = \pi\delta(x). \quad (2.36)$$

Аналогично, для $n=2$ и $B=x_1^2-x_2^2$, ввиду (2.20), (2.24′) и (2.25), получаем

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-1}\frac{B_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} = \delta(x) \Rightarrow \operatorname*{res}_{\nu=-1} H_\nu(\sqrt{B_+(x)}) = \delta(x). \quad (2.37)$$

§ 3. Инвариантные фундаментальные решения уравнений второго порядка с вещественными коэффициентами

В этом параграфе мы построим фундаментальные решения для уравнений (0.1) *второго порядка*, т. е. когда $m=2$, с вещественными коэффициентами. Такие уравнения можно записать в виде

$$Pu(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f(x), \quad x\in\mathbb{R}^n. \quad (3.1)$$

Предположим также, что это уравнение имеет невырожденную квадратичную форму, т. е.

$$\det A \neq 0, \quad A=(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}, \quad a_{ij}=a_{ji}. \quad (3.2)$$

Замена $u(x)=v(x)e^{b\cdot x}$, $b\in\mathbb{R}^n$, приводит уравнение (3.1) к виду

$$P_1 v \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}(2(Ab)_i+a_i)\frac{\partial v}{\partial x_i}+$$
$$+(a_0+(Ab,\, b)+(a,\, b)v=fe^{-bx}. \tag{3.3}$$

Определим вектор b так, чтобы $2Ab+a=0$, т. е. $b=-\frac{1}{2}A^{-1}a$. Тогда (3.3) принимает вид

$$P_1 v=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}+qv=f(x)e^{-bx}\equiv g(x);$$
$$q=a_0-\frac{1}{4}(a,\, A^{-1}a). \tag{3.4}$$

Таким образом, уравнения (3.1) и (3.4) эквивалентны. Более того, они имеют одни и те же фундаментальные решения, поскольку $\delta(x)e^{-b\cdot x}=\delta(x)$.

Приведем (3.4) к каноническому виду линейной заменой переменных $x=Cy$. При этом матрица A преобразуется в матрицу

$$B=C^{-1}A(C^{-1})^t \tag{3.5}$$

точно так же, как при преобразовании квадратичной формы под действием $(C^{-1})^t$. Поэтому можно выбрать C так, чтобы B была диагональной:

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn}\end{pmatrix};\quad b_{ii}=\pm 1,\quad i=1,\ldots,n. \tag{3.6}$$

Тогда уравнение (3.4) примет вид

$$P_1 v=\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2 v}{\partial y_m^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y_{m+1}^2}-\ldots-\frac{\partial^2 v}{\partial y_n^2}+qv=$$
$$=g(Cy),\quad y\in\mathbb{R}^n. \tag{3.7}$$

Построим для (3.7) фундаментальное решение:

$$P_1\mathscr{E}(y)=\frac{\partial^2\mathscr{E}(y)}{\partial y_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2\mathscr{E}(y)}{\partial y_m^2}-\frac{\partial^2\mathscr{E}(y)}{\partial y_{m+1}^2}-\ldots-\frac{\partial^2\mathscr{E}(y)}{\partial y_n^2}+$$
$$+q\mathscr{E}(y)=\delta(y),\quad y\in\mathbb{R}^n. \tag{3.8}$$

Замечание 3.1. Если $g(x)=\delta(x)$, то $g(Cy)=\frac{1}{|C|}\delta(y)$ при $C\in\mathrm{GL}(n)$. Поэтому если $\mathscr{E}(y)$ фундаментальное решение уравнения (3.8), то функция

$$\frac{\mathscr{E}(C^{-1}x)}{|C|}\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \tag{3.8'}$$

является фундаментальным решением уравнения (3.4) (и (3.1)).

3.1. Анализ свойств инвариантности уравнения. Рассмотрим квадратичную форму уравнения (3.8)

$$B(y)=\sum_{i=1}^{n} b_{ii}y_i^2=y_1^2+\ldots+y_m^2-y_{m+1}^2-\ldots-y_n^2,\quad y\in\mathbf{R}^n. \tag{3.9}$$

Эта форма инвариантна относительно «ортогональных» преобразований $C\in O(n, m)$ (для которых $C^tBC=B$, т. е. $B(Cy)=B(y)$, $y\in\mathbf{R}^n$). Само уравнение (3.8) инвариантно относительно замен $y\mapsto C^ty$, поскольку $C^tB(C^t)^t=B$ (ср. с (3.5)). Поэтому если $\mathscr{E}(y)$ — решение уравнения (3.8), то $\mathscr{E}(C^ty)$ также решение этого уравнения. Это видно также непосредственно:

$$\sum_k b_{kk}\frac{\partial^2(\mathscr{E}(C^ty))}{\partial y_k^2}=\sum_{k,i,j} b_{kk}\left(\frac{\partial^2\mathscr{E}}{\partial y_i\partial y_j}\right)(C^ty)\,C_{ik}^tC_{jk}^t=$$

$$=\sum_{i,j}(C^tBC)_{ij}\left(\frac{\partial^2\mathscr{E}}{\partial y_i\partial y_j}\right)(C^ty)=\sum b_{ii}\frac{\partial^2\mathscr{E}}{\partial y_i^2}=\delta(y),\quad y\in\mathbf{R}^n. \tag{3.10}$$

Кроме того, поскольку $B^{-1}=B$, то также $C^{-1}B(C^t)^{-1}=B$, т. е. C^t также сохраняет форму (3.9) и $\mathscr{E}(Cy)$ — решение уравнения (3.8).

Эти соображения инвариантности наводят на мысль о существовании *инвариантного фундаментального решения*, т. е. для которого $\mathscr{E}(Cx)=\mathscr{E}(x)$, $x\in\mathbf{R}^n$, при $\forall C\in O(n, m)$. Такие распределения в каждой компоненте связности множества $\{x\in\mathbf{R}^n: B(x)\neq 0\}$ имеют вид

$$\mathscr{E}(y)=E(\rho),\quad \rho\equiv\sqrt{B(y)}, \tag{3.11}$$

где $E(\rho)$ — обобщенная функция от одной переменной. Ветвь $\sqrt{B(y)}$ здесь можно считать пока произвольной.

Можно выбрать $\rho=\sqrt{B(y)}\in C^\infty(\mathbf{R}^n\setminus Q)$, где Q — «конус» $B(y)=0$.

Область значений функции $\rho(y)=\sqrt{B(y)}$ при $y\in\mathbf{R}^n\setminus Q$ в дальнейшем для краткости будем обозначать через $\mathscr{R}$. Очевидно, $0\notin\mathscr{R}$.

3.2. Нахождение регулярной части инвариантного фундаментального решения. Найдем обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $E(\rho)$, предполагая, что функция (3.11) является фундаментальным решением, т. е. выполняется (3.8).

Подставляя (3.11) в (3.8), получаем при $y\in\mathbf{R}^n\setminus Q$

$$\frac{\partial\mathscr{E}(y)}{\partial y_k}=E'(\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y_k},\quad \frac{\partial^2\mathscr{E}(y)}{\partial y_k^2}=E''(\rho)\left(\frac{\partial\rho}{\partial y_k}\right)^2+E'(\rho)\frac{\partial^2\rho}{\partial y_k^2}. \tag{3.12}$$

Но

$$\frac{\partial\rho}{\partial y_k}=\pm\frac{y_k}{\rho},\quad \frac{\partial^2\rho}{\partial y_k^2}=\pm\frac{1}{\rho}-\frac{y_k^2}{\rho^3},$$

где знак $+$ выбирается при $1 \leqslant k \leqslant m$ и $-$ при $m+1 \leqslant k \leqslant n$. Поэтому

$$\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial y_k^2} = E''(\rho)\frac{y_k^2}{\rho^2} + E'(\rho)\left(\pm\frac{1}{\rho} - \frac{y_k^2}{\rho^3}\right), \quad \rho \in \mathscr{R}. \tag{3.13}$$

Складывая эти равенства для $k=1, \ldots, n$, получаем

$$P_1\mathscr{E}(y) = E''(\rho) + \frac{n-1}{\rho}E'(\rho) + qE(\rho), \quad y \in \mathbf{R}^n \setminus Q. \tag{3.14}$$

Поэтому, в силу (3.8),

$$P_1\mathscr{E}(y) = E''(\rho) + \frac{n-1}{\rho}E'(\rho) + qE(\rho) = 0 \text{ при } \rho \in \mathscr{R}, \tag{3.14'}$$

поскольку $\delta(y)=0$ при $y \neq 0$, а значит, и при $\rho \in \mathscr{R}$.

Далее, надо различать случаи $q=0$ и $q \neq 0$.

В случае $q=0$ уравнение (3.14′) легко решается (ср. с [63]):

$$E(\rho) = \begin{cases} c_1\dfrac{1}{\rho^{n-2}} + c_2, & \rho \in \mathscr{R},\ n \neq 2, \\ c_1 + c_2 \ln \rho, & \rho \in \mathscr{R},\ n = 2. \end{cases} \tag{3.15}$$

При $q \neq 0$ уравнение (3.14′) приводится к случаю $q=1$ подстановкой $z=\sqrt{q}\,\rho$:

$$P_1\mathscr{E}(y) = q\left(\frac{d^2E}{dz^2} + \frac{n-1}{z}\frac{dE}{dz} + E(z)\right) = 0, \quad z \in Z \equiv \sqrt{q}\,\mathscr{R}, \tag{3.16}$$

которое, в свою очередь, приводится к уравнению Бесселя заменой $E(z) = z^{p_0}w(z)$.

Действительно,

$$\frac{dE(z)}{dz} = z^{p_0}\frac{dw(z)}{dz} + p_0 z^{p_0-1}w, \quad z \in Z, \tag{3.17}$$

$$\frac{d^2E(z)}{dz^2} = z^{p_0}\frac{d^2w(z)}{dz^2} + 2p_0 z^{p_0-1}\frac{dw}{dz} + p_0(p_0-1)z^{p_0-2}w(z).$$

Подставляя (3.17) в (3.16), получаем

$$P_1\mathscr{E}(y) = q\left[z^{p_0}\frac{d^2w(z)}{dz^2} + \frac{1}{z}z^{p_0}\frac{dw}{dz}(n-1+2p_0) + \right.$$
$$\left. + w\left[z^{p_0} + z^{p_0-2}((n-1)p_0 + p_0(p_0-1))\right]\right] = 0, \quad z \in Z. \tag{3.18}$$

Отсюда

$$P_1\mathscr{E}(y) = qz^{p_0}\left[\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{1}{z}(n-1+2p_0)\frac{dw}{dz} + \right.$$
$$\left. + \left(1 + \frac{(n-1)p_0 + p_0(p_0-1)}{z^2}\right)w(z)\right] = 0, \quad z \in Z. \tag{3.19}$$

Это уравнение совпадает со стандартным уравнением Бесселя порядка ν_0 ([41], [76]), если $n-1+2p_0=1$, $\nu_0^2 = -((n-1)p_0 + p_0(p_0-1)) = -p_0(n-2+p_0)$. Отсюда находим p_0 и ν_0:

$$p_0 = -\frac{n-2}{2}, \quad \nu_0^2 = \left(\frac{n-2}{2}\right)^2. \tag{3.20}$$

При таких p_0 и ν_0 уравнение (3.19) принимает вид [41], [71]:

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}+\left(1-\frac{\nu_0^2}{z^2}\right)w(z)=0, \quad z\in Z. \tag{3.21}$$

Можно положить $\nu_0 \equiv p_0 = -\frac{n-2}{2}$. Общее решение уравнения (3.21) имеет вид [41], [71]

$$w(z)=c_1 J_{\nu_0}(z)+c_2 Y_{\nu_0}(z), \quad \nu_0=-\frac{n-2}{2}. \tag{3.22}$$

Следовательно в области, где $B(y)\neq 0$ (ср. с. [51], [56])

$$\mathscr{E}(y)=\mathscr{E}_{\nu_0}(y)\equiv E_{\nu_0}(\rho)\equiv z^{\nu_0}w(z)=$$

$$=(\sqrt{q}\,\rho)^{\nu_0}[C_1 J_{\nu_0}(\sqrt{q}\,\rho)+C_2 Y_{\nu_0}(\sqrt{q}\,\rho)], \quad y\in \mathbf{R}^n\setminus Q. \tag{3.23}$$

Здесь $\sqrt{q}\,\rho=\sqrt{qB(x)}$ — действительная функция в области, где $qB(x)>0$ и чисто мнимая в области, где $qB(x)<0$; C_1 и C_2 постоянны в каждой компоненте связности области $\mathbf{R}^n\setminus Q$ (в которой $B(y)\neq 0$).

Итак, мы нашли явный вид (3.23) и (3.15) искомого инвариантного фундаментального решения в области, где $B(y)\neq 0$. Построенные функции (3.23) и (3.15) являются гладкими в $\mathbf{R}^n\setminus Q$, но при $y\to Q$ в случае $1\leqslant m\leqslant n-1$ и $n\geqslant 4$ они не являются локально суммируемыми в окрестности поверхности Q, где $B(y)=0$. Поэтому искомые фундаментальные решения являются некоторыми регуляризациями этих функций (при подходящем выборе констант C_1 и C_2). Для краткости будем называть функции (3.23) и (3.15) *формальными фундаментальными решениями.*

§ 4. Регуляризация формального фундаментального решения в случае $q=0$

В случае $q=0$ фомальное фундаментальное решение выражается формулами (3.15). Покажем, как их нужно регуляризовать, чтобы получить настоящие фундаментальные решения. При этом нужно различать два случая: $m=0$ или $m=n$, с одной стороны, и $1\leqslant m\leqslant n-1$, — с другой.

4.1. Случай $m=0$ или $m=n$. Фундаментальные решения уравнения (3.8) с $q=0$ при $m=0$ и $m=n$ отличаются только знаком. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $m=n$. Тогда $P_1(\partial_y)=\Delta$ — оператор Лапласа в $\mathbf{R}^n$, и $B(y)>0$ при $y\neq 0$. Покажем, что при $n\neq 2$ искомую регуляризацию функции (3.15) можно построить как аналитическое продолжение функции

$$\hat{\mathscr{E}}_\lambda(y)=C_1 B^\lambda(y)+C_2=C_1|y|^{2\lambda}+C_2 \tag{4.1}$$

из области $\operatorname{Re}\lambda>0$ в точку $\lambda=\lambda_0\equiv-\frac{n-2}{2}$. Возьмем $C_2=0$. Если $\operatorname{Re}\lambda>1$, то $\hat{\mathscr{E}}_\lambda(y)\in C^2(\mathbf{R}^n)$, и (3.14) для $\hat{\mathscr{E}}_\lambda$ вместо $\mathscr{E}$ выполняется при всех $y\in\mathbf{R}^n$, а не только при $y\in\mathbf{R}^n\setminus Q$. Следовательно, при $\operatorname{Re}\lambda>1$

$$P_1\hat{\mathscr{E}}_\lambda(y)=C_1 2\lambda(2\lambda+n-2)B^{\lambda-1}(y),\quad y\in\mathbf{R}^n. \tag{4.2}$$

Здесь правая часть — мероморфная функция от $\lambda\in\mathbf{C}$ со значениями в $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, в силу теоремы 2.1, и левая — также. Поэтому, ввиду единственности аналитического продолжения, равенство (4.2) справедливо при всех $\lambda\in\mathbf{C}$, кроме дискретного множества полюсов функций $\hat{\mathscr{E}}_\lambda$ и $B^{\lambda-1}$.

Замечание 4.1. Подобным образом для обобщенных функций, определенных при помощи аналитического продолжения по параметру (или параметрам) удается доказать справедливость различных замечательных формул классического анализа. Это обстоятельство является главным преимуществом регуляризации при помощи аналитического продолжения по параметру.

В точке $\lambda=\lambda_0=-\frac{n}{2}+1$, по теореме 2.1, функция $B^\lambda(y)$ голоморфна, а $B^{\lambda-1}(y)=|y|^{2(\lambda-1)}$ имеет простой полюс с вычетом $\frac{\Omega_n}{2}\delta(y)$. (см. (2.7′)). Кроме того, $2\lambda+n-2=0$ при $\lambda=\lambda_0$. Поэтому, из (4.2) вытекает при $\lambda\to\lambda_0$, что

$$P_1\hat{\mathscr{E}}_{\lambda_0}(y)=C_1 4\lambda_0\cdot\operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_0}B^{\lambda-1}=C_1 2\lambda_0\Omega_n\delta(y)=-C_1(n-2)\Omega_n\delta(y). \tag{4.3}$$

Отсюда, при $n\neq2$ находим C_1 и, по формуле (4.1), получаем искомые фундаментальные решения (2.10′) главы 1.

Описанная процедура не проходит при $n=2$. Это связано с тем, что множитель в правой части (4.2) при $\lambda=\lambda_0$ имеет нуль второго порядка, а $B^{\lambda-1}$ — полюс первого порядка. Поэтому для нахождения фундаментального решения при $n=2$ нужно продифференцировать тождество (4.2) по λ при $\lambda=\lambda_0=0$; при этом получаем

$$P_1\frac{d\hat{\mathscr{E}}_\lambda}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}=C_1\Big[(2(2\lambda+n-2)+2\lambda\cdot2)B^{\lambda-1}+$$
$$+2\lambda(2\lambda+n-2)\frac{dB^{\lambda-1}}{d\lambda}\Big]\Big|_{\lambda=0}=C_1\Big[8\operatorname*{res}_{\lambda=0}B^{\lambda-1}+4\operatorname*{res_2}_{\lambda=0}\frac{dB^{\lambda-1}}{d\lambda}\Big]=$$
$$=C_1\Big[8\frac{\Omega_2}{2}\delta(y)-4\frac{\Omega_2}{2}\delta(y)\Big]=C_1 4\pi\delta(y), \tag{4.4}$$

где $\operatorname*{res_2}_{\lambda=0}\frac{dB^{\lambda-1}}{d\lambda}=\operatorname*{res}_{\lambda=0}B^{\lambda-1}$ — «второй» вычет функции $\frac{dB^{\lambda-1}}{d\lambda}$, в точке $\lambda=0$, т. е. коэффициент при $\frac{1}{\lambda^2}$. Отсюда получается формула (2.10′) главы 1 в случае $n=2$.

4.2. Случай $1\leqslant m\leqslant n-1$. В этом случае функции (3.15) — гладкие вне поверхности Q, на которой $B(y)=0$. Покажем, что можно, как и выше, взять $C_2=0$ и, кроме того, $C_1=0$ в области, где $B(y)<0$. А именно, построим регуляризацию функции (3.15) как аналитическое продолжение функции

$$\mathscr{E}_\lambda(y)=C_1\frac{B_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}=C_1\frac{\rho_+^{2\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)},\quad \rho_+(y)\equiv\sqrt{B_+(y)},\tag{4.5}$$

в точку $\lambda=\lambda^0\equiv-\frac{n-2}{2}$.

Замечание 4.2. Множитель $\Gamma(\lambda+1)$ в знаменателе в (4.5) необходимо ввести из-за наличия полюсов B_+^λ при $\lambda=-1$, $-2,\ldots$ Эти полюса связаны с особенностями B_+^λ на поверхности Q, и может оказаться, что в точке λ_0 функция B_+^λ имеет полюс (при четном $n\geqslant 4$). В рассмотренном ранее случае $m=0$ или $m=n$ функция B_+^λ имела полюса лишь при $\lambda=-\frac{n}{2}$, $-\frac{n}{2}-1,\ldots$, и точка $\lambda=\lambda_0$ была неособой, поскольку Q состояла из одной точки: $Q=\{0\}$.

Очевидно, $\mathscr{E}_\lambda(y)\in C^2(\mathbf{R}^n)$ при $\operatorname{Re}\lambda>2$. Поэтому из (3.14) получаем, аналогично (4.2),

$$\begin{aligned}P_1\mathscr{E}_\lambda(y)&=C_1\left[2\lambda(2\lambda-1)\frac{\rho_+^{2\lambda-2}}{\Gamma(\lambda+1)}+\frac{(n-1)2\lambda\rho_+^{2\lambda-2}}{\Gamma(\lambda+1)}\right]=\\&=C_1\frac{2(2\lambda+n-2)}{\Gamma(\lambda)}B_+^{\lambda-1}(y),\quad y\in\mathbf{R}^n.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Как и выше, это равенство верно при всех λ, кроме дискретного множества полюсов. Поэтому, аналогично (4.3), при $\lambda\to\lambda_0=-\frac{n}{2}+1$ получаем, ввиду (2.20),

$$P_1\mathscr{E}_{\lambda_0}(y)=C_1 4\operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_0}\frac{B_+^{\lambda-1}(y)}{\Gamma(\lambda)}=c_1 4\Omega_{m,n-m}\delta(y).\tag{4.7}$$

Отсюда находим $c_1=\frac{1}{4\Omega_{m,n-m}}$ и искомое фундаментальное решение

$$\mathscr{E}_{\lambda_0}(y)=\frac{1}{4\Omega_{m,n-m}}\left.\frac{B_+^\lambda(y)}{\Gamma(\lambda+1)}\right|_{\lambda=-\frac{n-2}{2}}.\tag{4.8}$$

Пример 4.1. Волновое уравнение (2.6) главы 1 в $\mathbf{R}^k$ при $a=1$ имеет фундаментальное решение

$$\mathscr{E}_k(t, x)=\frac{1}{4\Omega_{1,k}} \frac{(t^2-|x|^2)_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\Bigg|_{\lambda=-\frac{k-1}{2}}, \tag{4.9}$$

поскольку $n=k+1$ и $-\frac{n-2}{2}=-\frac{k-1}{2}$.

Замечание 4.3. При $a>0$, ввиду замечания 3.1, фундаментальным решением уравнения (2.6) главы 1 является функция

$$\mathscr{E}_k(t, x)=\frac{1}{4\Omega_{1,k}\cdot a^k} \frac{\left(t^2-\left|\frac{x}{a}\right|^2\right)_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\Bigg|_{\lambda=-\frac{k-1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{4\Omega_{1,k}a} \frac{(a^2t^2-|x|^2)_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\Bigg|_{\lambda=-\frac{k-1}{2}}, \tag{4.9'}$$

(ср. [63]) поскольку замена $(t, x)\mapsto C^{-1}(t, x)=(t, x/a)$ приводит уравнение (2.6) главы 1 к случаю $a=1$, и $\det C=a^k$.

Замечание 4.4. Для волнового уравнения (2.6) главы 1 при $a=1$ инвариантным фундаментальным решением является также функция

$$\mathscr{E}_k^{\pm}(t, x)=\frac{\theta(\pm t)}{2\Omega_{1,k}} \frac{(t^2-|x|^2)_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\Bigg|_{\lambda=-\frac{k-1}{2}}, \tag{4.10}$$

полученная, по определению, аналитическим продолжением функции $\frac{\theta(\pm t)}{2\Omega_{1,k}} \frac{B_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$ в точку $\lambda=-\frac{k-1}{2}$. Действительно, уравнение (4.6) для этой функции также справедливо при $\operatorname{Re}\lambda>2$. Кроме того, эта функция также продолжается до мероморфной функции от $\lambda\in\mathbb{C}$, что доказывается дословно так же, как теорема 2.2. Однако полюса теперь расположены в точках $\lambda=-\frac{n}{2}$, $-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}, \dots$. Это связано с тем, что теперь при определении $\bar{\varphi}$ в (2.15) нужно интегрирование по $|\omega_m|=1$ заменить просто подстановкой $\omega_m\equiv t=\pm 1$, и поэтому $\bar{\varphi}(r, \rho)$ при $r\to 0$ содержит все целые неотрицательные степени t. Кроме того, теперь $\bar{\varphi}(0, 0)=\frac{\Omega_1}{2}\Omega_k\varphi(0)$, так что вычет (2.20) для $\theta(\pm t)\frac{B_\lambda^+}{\Gamma(\lambda+1)}$ в 2 раза меньше. Поэтому в (4.10) знаменатель также в 2 раза меньше, чем в (4.9).

Следствие 4.1. Из (4.9), (4.10) в силу (2.22), получаем, что при нечетных $k=2l+1\geqslant 3$

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_k(t, x)&=\frac{1}{4\Omega_{1,k}} \frac{\delta^{(l-1)}(t^2-|x|^2)}{(l-1)!}, \quad (t, x)\neq 0;\\ \mathscr{E}_k^{\pm}(t, x)&=\frac{\theta(\pm t)}{2\Omega_{1,k}} \frac{\delta^{(l-1)}(t^2-|x|^2)}{(l-1)!}, \quad (t, x)\neq 0.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Это означает, что при нечетных $k \geqslant 3$ фундаментальное решение $\mathscr{E}_k$ волнового уравнения в $\mathbf{R}^k$ сосредоточено на *«световом конусе»*. $t^2 = |x|^2$, а $\mathscr{E}_k^{\pm}$ — на *«световом конусе будущего»* (где $t \geqslant 0$) или *«прошлого»* (где $t \leqslant 0$) соответственно. Отсюда вытекает, что при нечетных $k \geqslant 3$ решения волнового уравнения в $\mathbf{R}^k$ имеют резкий передний и задний фронт (см. § 2, гл. 1). При четных $k \geqslant 2$ и при $k=1$ фундаментальные решения $\mathscr{E}_k$ и $(\mathscr{E}_k^{\pm})$ сосредоточены внутри светового конуса, т. е. в области $t^2 - |x|^2 \geqslant \geqslant 0$ (и $t \gtrless 0$) и соответственно, решения волнового уравнения имеют резкий передний фронт, но не имеют резкого заднего фронта, т. е. имеет место *«диффузия волн»*.

Замечание 4.5. Из формул (4.11) при $k=3$ вытекает формула (2.6′) главы 1 для $\mathscr{E}_3^{\pm}$, поскольку $\Omega_{1,3} = \pi$, согласно (2.24). Кроме того, из (4.10) при $k=1$ получается формула (2.6′) главы 1 для $\mathscr{E}_1^{\pm}$, поскольку $\Omega_{1,1} = 1$, согласно (2.24′). Наконец, формулу (2.6′) главы 1 для $\mathscr{E}_2^{\pm}$ также можно получить из (4.10), если вычислить $\Omega_{1,2}$. Однако проще найти $\mathscr{E}_2^{\pm}$ *методом спуска* [14], [34]: формально

$$\mathscr{E}_2^{\pm}(t, x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{E}_3^{\pm}(t, x_1, x_2, x_3)\, dx_3. \tag{4.12}$$

Такая же формула связывает $\mathscr{E}_k^{\pm}$ с $\mathscr{E}_{k+1}^{\pm}$ при любом $k \geqslant 1$. Отметим, что $\Omega_{1,k}$ при нечетных k легко вычисляются при помощи дифференцирования, как в (2.24) и (2.24′). Поэтому $\mathscr{E}_k^{\pm}$ при нечетных k получаются из (4.11), а при четных k — методом спуска, как в (4.12). При этом в качестве следствия получаем, что $\Omega_{1,2} = \sqrt{\pi}$.

§ 5. Регуляризация фундаментального решения в случае $q \neq 0$

Если $q \neq 0$, то $\mathscr{E}(y)$ в области, где $B(y) \neq 0$, выражается формулой (3.23). Покажем, что фундаментальное решение $\mathscr{E}(y)$ можно построить как регуляризацию функции (3.23). При этом можно взять $C_2 = 0$, по крайней мере при $n \neq 2$. Итак, будем искать фундаментальное решение как регуляризацию функции (см. (2.25))

$$\mathscr{E}_{\nu_0}(y) = C_1 (\sqrt{qB})^{\nu_0} J_{\nu_0}(\sqrt{qB}) = C_1 H_{\nu_0}(\sqrt{qB(y)}),\quad y \in \mathbf{R}^n \setminus Q, \tag{5.1}$$

где C_1 постоянна в компонентах связности области $\mathbf{R}^n \setminus Q$. При этом, как и выше, при $q \neq 0$, нужно различать 2 случая: когда $m=0$ или n, и когда $1 \leqslant m \leqslant n-1$. За счет умножения уравнения (3.8) на -1 можно свести все к случаю $q > 0$.

5.1. Случай $1 \leqslant m \leqslant n-1$. Будем считать, что $C_1 = 0$ в области, где $B(y) < 0$ и C_1 постоянна в области, где $B(y) > 0$, хотя эта область может иметь не одну компоненту связности (как для интервала Лоренца $B(y)=y_1^2-y_2^2-\ldots-y_n^2$). Тогда (5.1 принимает вид ($q>0$):

$$\mathscr{E}_{\nu_0}(y)=C_1 H_{\nu_0}\left(\sqrt{qB_+(y)}\right), \quad y\in\mathbf{R}^n\setminus Q. \tag{5.2}$$

Покажем, что искомую регуляризацию функции (5.2) можно построить как аналитическое продолжение функции

$$\mathscr{E}_{\nu}(y)\equiv C_1 H_{\nu}\left(\sqrt{qB_+(y)}\right), \quad y\in\mathbf{R}^n, \tag{5.3}$$

по параметру ν из области $\operatorname{Re}\nu>0$ в точку $\nu=\nu_0\equiv-\frac{n-2}{2}$. Из (2.25) видно, что $|H_\nu(\sqrt{qB_+(y)})|\sim|B_+(y)|^{\operatorname{Re}\nu}$ при $y\to Q$. Поэтому $\mathscr{E}_\nu(y)\in C^2(\mathbf{R}^n)$ при $\operatorname{Re}\nu>2$, и для функции $\mathscr{E}_\nu$ вместо $\mathscr{E}$ все формулы (3.16)—(3.19) справедливы с ν и J_ν вместо p_0 и w не только при $y\in\mathbf{R}^n\setminus Q$, но и при всех $y\in\mathbf{R}^n$.

Поэтому из (3.19) (с $p_0=\nu$) вытекает, что при $\operatorname{Re}\nu>2$

$$P_1\mathscr{E}_\nu(y)=C_1 q z^\nu\left[\frac{d^2J_\nu}{dz^2}+\frac{1}{z}(n-1+2\nu)\frac{dJ_\nu}{dz}+\right.$$

$$\left.+\left(1+\frac{\nu(n-2+\nu)}{z^2}\right)J_\nu(z)\right]=C_1 q\,(n-2+2\nu)\left[z^{\nu-1}\frac{dJ_\nu}{dz}+\nu z^{\nu-2}J_\nu\right],$$

$$y\in\mathbf{R}^n;\quad z=z(y)\equiv\sqrt{qB_+(y)}. \tag{5.4}$$

Как и выше, это равенство справедливо при всех $\nu\in\mathbf{C}$, кроме дискретного множества полюсов, если в правой части функции $z^{\nu-1}\frac{dJ_\nu}{dz}$ и $z^{\nu-2}J_\nu$ в области $\operatorname{Re}\nu<2$ определять как аналитические продолжения по ν со значениями $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$. Существование таких продолжений, очевидно, вытекает из теоремы 2.2 и формулы (1.9), аналогично теореме 2.3.

Из теоремы 2.3, в частности, вытекает аналитичность левой части (5.4) по ν в точке $\nu=\nu_0\equiv-\frac{n-2}{2}$. Найдем предел правой части (5.4) при $\nu\to\nu_0$.

Для этого заметим, что слагаемые $z^{\nu-1}\frac{dJ_\nu}{dz}$ и $z^{\nu-2}J_\nu$ в правой части (5.4) имеют простые полюса в точке $\nu=\nu_0$, а множитель $n-2+2\nu$ обращается в этой точке в нуль. Поэтому правая часть (5.4) при $\nu\to\nu_0$ имеет предел и выражается через вычеты функций $z^{\nu-1}\frac{dJ_\nu}{dz}$ и $z^{\nu-2}J_\nu$ в точке $\nu=\nu_0$. Эти вычеты легко найти, используя формулы (2.20) и (1.9): поскольку $\nu_0=-\frac{n}{2}+1$, то

$$\operatorname*{res}_{\nu=\nu_0} z^{\nu-1}\frac{dJ_\nu}{dz}=\operatorname*{res}_{\nu=\nu_0}\left(\sqrt{qB_+}\right)^{\nu-1}2^{-\nu}\frac{\nu\left(\sqrt{qB_+}\right)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu+1)}=$$

$$=2^{-\nu_0}q^{\nu_0-1}\operatorname*{res}_{\nu=\nu_0}\frac{B_+^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{n}{2}}\operatorname*{res}_{\mu=-\frac{n}{2}}\frac{B_+^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{n}{2}}\Omega_{m,n-m}\delta(y). \tag{5.5}$$

Аналогично,

$$\operatorname*{res}_{\nu=\nu_0}\nu z^{\nu-2}J_\nu=\operatorname*{res}_{\nu=\nu_0}\left(\sqrt{qB_+}\right)^{\nu-2}2^{-\nu}\frac{\nu\left(\sqrt{qB_+}\right)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{n}{2}}\Omega_{m,n-m}\delta(y). \tag{5.6}$$

Устремляя $\nu\to\nu_0$ в (5.4), получаем, ввиду (5.5) и (5.6):

$$P_1\mathscr{E}_{\nu_0}(y)=C_1q\,2\operatorname*{res}_{\nu=\nu_0}\left(z^{\nu-1}\frac{dJ_\nu}{dz}+\nu z^{\nu-2}J_\nu\right)=$$

$$=C_12q\left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{n}{2}}\Omega_{m,n-m}\delta(y)=C_1q^{\nu_0}2^{\frac{n}{2}+1}\Omega_{m,n-m}\delta(y). \tag{5.7}$$

Отсюда находим C_1 и искомое фундаментальное решение (см. (2.25)):

$$\mathscr{E}_{\nu_0}(y)=C_1H_{\nu_0}\left(\sqrt{qB_+}\right)=$$

$$=\frac{q^{-\nu_0}}{2^{\frac{n}{2}+1}\Omega_{m,n-m}}\left[(qB_+(y))^{\nu/2}J_\nu\left(\sqrt{qB_+(y)}\right)\right]\Big|_{\nu=-\frac{n-2}{2}}=$$

$$=\frac{q^{\frac{n-2}{4}}}{2^{(n/2)+1}\Omega_{m,n-m}}\left[B_+^{\nu/2}(y)\,J_\nu\left(\sqrt{qB_+(y)}\right)\right]\Big|_{\nu=-\frac{n-2}{2}}. \tag{5.8}$$

При $q_0\to 0$ эта формула, как легко проверить, переходит в (4.8). Эта формула получена нами в предположении, что $q>0$. Если $q<0$, то, умножая уравнение (3.8) на -1, сводим задачу к предыдущему случаю. При этом формула (5.8) дает фундаментальное решение, если в ней заменить C_1 на $-C_1$, q на $-q$, B на $-B$, а m и $n-m$ поменять местами:

$$\mathscr{E}(x)=-\frac{|q|^{\frac{n-2}{4}}}{2^{(n/2)+1}\Omega_{n-m,m}}\left[(-B)_+^{\nu/2}J_\nu\left(\sqrt{(qB)_+}\right)\right]\Big|_{\nu=-\frac{n-2}{2}},\quad q<0. \tag{5.9}$$

Следствие 5.1. Уравнение Клейна—Гордона (уравнение (2.7) главы 1) в $\mathbb{R}^k$ при $a=1$ имеет фундаментальное решение

$$\mathscr{E}_k(t, x) =$$

$$= \frac{m_0^{\frac{k-1}{2}}}{2^{(k+3)/2}\Omega_{1,k}} \left[(t^2 - |x|^2)_+^{\nu/2} J_\nu (m_0 \sqrt{(t^2 - |x|^2)_+})\right]\Big|_{\nu=-\frac{k-1}{2}}. \quad (5.10)$$

Случай $a>0$ сводится к $a=1$, как в замечании 4.3. Поэтому для $a\neq 1$ фундаментальным решением уравнения Клейна—Гордона является (ср. (4.9′)) функция (ср. с [51], [56])

$$\mathscr{E}_k(t, x) = \frac{m_0^{\frac{k-1}{2}}}{2^{(k+3)/2}\Omega_{1,k} a^k} \times$$

$$\times \left[\left(t^2 - \left|\frac{x}{a}\right|^2\right)_+^{\nu/2} J_\nu\left(m_0 \sqrt{\left(t^2 - \left|\frac{x}{a}\right|^2\right)_+}\right)\right]\Bigg|_{\nu=-\frac{k-1}{2}}, \quad (5.11)$$

и, аналогично (4.10), функции

$$\mathscr{E}_k^{\pm}(t, x) = \frac{\theta(\pm t)\, m_0^{\frac{k-1}{2}}}{2^{(k+1)/2}\Omega_{1,k} a^k} \times$$

$$\times \left[\left(t^2 - \left|\frac{x}{a}\right|^2\right)_+^{\nu/2} J_\nu\left(m_0 \sqrt{\left(t^2 - \left|\frac{x}{a}\right|^2\right)_+}\right)\right]\Bigg|_{\nu=-\frac{k-1}{2}}, \quad (5.12)$$

которые определяются как аналитические продолжения по ν из области $\operatorname{Re}\nu>0$ в точку $\nu=\nu_0\equiv -\frac{k-1}{2}$; $\mathscr{E}_k^{\pm}(t, x)$—это так называемые «запаздывающее» и «опережающее» фундаментальные решения уравнения Клейна—Гордона [6].

Пример 5.1. В случае $k=1$ из (5.12) получаем формулу (2.7′) главы 1 для $\mathscr{E}_1^{\pm}$, поскольку $\Omega_{1,1}=1$, согласно (2.24′), и $\nu_0=0$. В случае $k=2$ также из (5.12) вытекает формула (2.7′) главы 1 для $\mathscr{E}_2^{\pm}$, поскольку $\Omega_{1,2}=\sqrt{\pi}$ (см. замечание 4.5) и $\nu_0=-\frac{1}{2}$. Наконец, в случае $k=3$ из (5.12), ввиду (2.35), получаем

$$\mathscr{E}_3^{\pm}(t, x) = \frac{\theta(\pm t)\, m_0^2}{4\Omega_{1,3} a^3}\left(\delta\left(m_0^2\left(t^2 - \left|\frac{x}{a}\right|^2\right)\right) - \right.$$

$$\left. - \left(m_0^2\left(t^2 - \left|\frac{x}{a}\right|^2\right)\right)^{-\frac{1}{2}} J_1\left(m_0 \sqrt{\left(t^2 - \left|\frac{x}{a}\right|^2\right)_+}\right)\right), \quad (5.13)$$

что совпадает с формулой (2.7′) главы 1 для $\mathscr{E}_3^{\pm}$, поскольку $\Omega_{1,3}=\pi$ согласно (2.24).

Отметим, что $\delta(a^2t^2 - |x|^2)$ в формуле (2.7′) главы 1, согласно замечанию 2.1, понимается в смысле определения 1.22 главы 1, *поскольку условие* (2.29) в этом случае выполняется ($l=1$ и $n=4$).

5.2. Случай $m=0$ или $m=n$. Как и выше, достаточно разобрать случай $q>0$.

Сначала разберем случай, когда $m=n$, $q>0$. Тогда $P_1=\Delta+q$ — оператор Гельмгольца. Покажем, что фундаментальное решение оператора P_1 при $n\neq 2$ можно построить как регуляризацию функции вида (5.3). Однако вычисления (5.5)—(5.7) при $m=n$ неверны, поскольку они основаны на формуле (2.20), справедливой лишь в случае $1\leqslant m\leqslant n-1$. Действительно, при $m=n$ функция B_+^{ν} не имеет полюсов при $\nu=-1, -2, \ldots$, если $\nu\notin\mathcal{P}^0$. *Поэтому множитель* $\Gamma(\nu+1)$, *входящий в «знаменатель»* бесселевой функции J_ν (см. (2.25), нужно убрать. Совершенно аналогичную ситуацию мы имели в § 4 при рассмотрении случая $q=0$. Это видно из сравнения формул (4.5) и (4.1) (см. также замечание 4.2). Итак, будем строить фундаментальное решение как аналитическое продолжение по ν функции

$$\mathring{\mathcal{E}}_\nu(y)\equiv C_1\Gamma(\nu+1)H_\nu\left(\sqrt{qB}\right)=$$
$$=C_1\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{(qB(y))^{r+\nu}}{2^{2r+\nu}r!(\nu+r)\ldots(\nu+1)} \tag{5.14}$$

в точку $\nu=\nu_0\equiv-\frac{n-2}{2}$. Здесь мы использовали (2.25) и тождество $\Gamma(\nu+r+1)=(\nu+r)\ldots(\nu+1)\Gamma(\nu+1)$; очевидно, сейчас $B(y)\equiv B_+(y)$.

Из (5.14) видно, что $\mathring{\mathcal{E}}_\nu(y)\in C^2(\mathbf{R}^n)$ при $\operatorname{Re}\nu>2$, а из теоремы 2.1 вытекает, что $\mathring{\mathcal{E}}_\nu(y)$ из области $\operatorname{Re}\nu>0$ продолжается до мероморфной функции от $\nu\in\mathbf{C}$ с простыми полюсами в точках $\nu\in\mathcal{P}^0$. При $\operatorname{Re}\nu>2$ функция (5.14) отличается от (5.3) лишь ненулевым множителем $\Gamma(\nu+1)$. Поэтому формула вида (5.4) остается справедливой и для функции (5.14), если вместо функции J_ν подставить

$$\mathcal{J}_\nu(z)\equiv\Gamma(\nu+1)J_\nu(z)=\sum(-1)^r\frac{z^{2r+\nu}}{2^{2r+\nu}r!(\nu+r)\ldots(\nu+1)}. \tag{5.15}$$

Итак, при $\operatorname{Re}\nu>2$

$$P_1\mathring{\mathcal{E}}_\nu(y)=C_1q(n-2+2\nu)\left[z^{\nu-1}\frac{d\mathcal{J}_\nu}{dz}+\nu z^{\nu-2}\mathcal{J}_\nu(z)\right],$$
$$y\in\mathbf{R}^n;\quad z\equiv\sqrt{qB(y)}. \tag{5.16}$$

Как и выше, эта формула справедлива также при всех $\nu\in\mathbf{C}$, кроме дискретного множества полюсов обеих частей. При $\nu=\nu_0$ левая часть голоморфна. Найдем предел правой части при $\nu\to\nu_0$. Это делается точно так же, как в (5.7). А именно, из (2.7′), аналогично (5.5), вытекает, что

$$\operatorname*{res}_{\nu=\nu_0} z^{\nu-1}\frac{d\mathcal{J}_\nu}{dz}=2^{-\nu_0}q^{\nu_0-1}\operatorname*{res}_{\nu=\nu_0}\nu B_+^{\nu-1}=2^{-\nu_0}q^{\nu_0-1}\nu_0\operatorname*{res}_{\mu=-\frac{n}{2}}B^{\mu}=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{q}\right)^{n/2}\nu_0\Omega_n\delta(y) \tag{5.17}$$

и, аналогично (5.6),

$$\operatorname*{res}_{\nu=\nu_0} \nu z^{\nu-2}\mathcal{J}_\nu = 2^{-\nu_0} q^{\nu_0-1} \operatorname*{res}_{\nu=\nu_0} \nu B^{\nu-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{q}\right)^{n/2} \nu_0 \Omega_n \delta(y). \quad (5.18)$$

Устремляя $\nu \to \nu_0$ в (5.16), получаем, ввиду (5.17) и (5.18):

$$P_1 \hat{\mathscr{E}}_{\nu_0}(y) = C_1 q \left(\frac{2}{q}\right)^{n/2} \nu_0 \Omega_n \delta(y) = -C_1 (n-2)\left(\frac{2}{q}\right)^{n/2-1} \Omega_n \delta(y). \quad (5.19)$$

Отсюда при $n \neq 2$ находим C_1 и искомое фундаментальное решение оператора $\Delta + q$, $q > 0$

$$\hat{\mathscr{E}}_{\nu_0}(y) = C_1 [\Gamma(\nu+1) H_\nu (\sqrt{qB(y)})]|_{\nu=\nu_0} =$$

$$= -\frac{q^{n/2-1}}{(n-2)\Omega_n 2^{n/2-1}} [\Gamma(\nu+1) (\sqrt{qB})^\nu J_\nu (\sqrt{qB})]|_{\nu=\nu_0}. \quad (5.20)$$

Для того, чтобы найти фундаментальное решение в случае $n = 2$, достаточно продифференцировать тождество (5.16) по ν при $\nu = \nu_0$. Тогда, аналогично (4.4), получаем при $\operatorname{Re}\nu > 2$:

$$P_1 \frac{d\hat{\mathscr{E}}_\nu}{d\nu} = C_1 q \left\{ 2\left[z^{\nu-1} \frac{d\mathcal{J}_\nu}{dz} + \nu z^{\nu-2} \mathcal{J}_\nu \right] + \right.$$

$$\left. + (n-2+2\nu) \frac{d}{d\nu}\left[z^{\nu-1} \frac{d\mathcal{J}_\nu}{dz} + \nu z^{\nu-2}\mathcal{J}_\nu \right] \right\}. \quad (5.21)$$

В силу единственности аналитического продолжения, это тождество справедливо также и при всех $\nu \in \mathbf{C}$, кроме дискретного множества полюсов. В точке $\nu = \nu_0 \equiv -\frac{n-2}{2} = 0$ левая часть (5.21) голоморфна. Поэтому, аналогично (5.19), из (5.21) при $\nu \to \nu_0 = 0$ получаем, аналогично (5.17) и (5.18):

$$P_1 \left.\frac{d\hat{\mathscr{E}}_\nu}{d\nu}\right|_{\nu=0} = C_1 q \left\{ 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{q}\right)^{n/2} \Omega_2 \delta(y) \right] + \right.$$

$$\left. + 2 \operatorname*{res}_{\nu=0} \left[z^{\nu-1} \frac{d\mathcal{J}_\nu}{dz} + \nu z^{\nu-2} \mathcal{J}_\nu \right] \right\} =$$

$$= C_1 q 2 \left(\frac{2}{q}\right)^{n/2} \Omega_2 \delta(y) = C_1 8\pi \delta(y), \quad (5.22)$$

т. к. $n = 2$ и $\Omega_2 = 2\pi$. Отсюда находим C_1 и фундаментальное решение оператора $\Delta + q$ при $n = 2$, $q > 0$:

$$\hat{\mathscr{E}}(y) = \frac{1}{8\pi} \left.\frac{d\hat{\mathscr{E}}_\nu(y)}{d\nu}\right|_{\nu=0}. \quad (5.23)$$

Это фундаментальное решение соответствует, как и должно быть, формуле (3.23), но теперь оказывается $C_1 = 0$, а $C_2 \neq 0$ (в отличие от (5.1) и (5.14)). А именно, пользуясь соотношениями между бесселевыми функциями [41], можно (5.23) представить в виде

$$\mathscr{E}(y)=\frac{1}{4}Y_0(\sqrt{qB(y)})=$$
$$=-\frac{i}{8}\left(H_0^{(1)}(\sqrt{qB(y)})-H_0^{(2)}(\sqrt{qB(y)})\right), \tag{5.24}$$

где $H_0^{(1)}(z)\equiv J_0(z)+iY_0(z)$ — первая функция Ханкеля нулевого порядка, а $H_0^{(2)}(z)\equiv J_0(z)-iY_0(z)$ — вторая функция Ханкеля. Поскольку $J_0(\sqrt{qB})=\frac{1}{2}\left(H_0^{(1)}(\sqrt{qB})+H_0^{(2)}(\sqrt{qB})\right)$ — целая функция от B, согласно (1.9), то из (3.14′) и (3.23) вытекает, что $(\Delta+q)J_0(\sqrt{qB(y)})=0$, $y\in\mathbf{R}^n$. Поэтому, наряду с функцией (5.24), фундаментальными решениями оператора $\Delta+q$ являются также функции [14]

$$\mathscr{E}(y)-\frac{i}{4}J_0(\sqrt{qB})=-\frac{i}{4}H_0^{(1)}(\sqrt{qB(y)})$$

и

$$\mathscr{E}(y)+\frac{i}{4}J_0(\sqrt{qB})=\frac{i}{4}H_0^{(2)}(\sqrt{qB(y)}), \tag{5.25}$$

комплексно сопряженные друг к другу. Из (5.25) при $q=\omega^2$ получаются формулы (2.11′) главы 1 для $\mathscr{E}_2^{\pm}$.

Пример 5.2. 1) Для одномерного оператора Гельмгольца $\frac{d^2}{dy^2}+\omega^2$ из общей формулы (5.20) получаем фундаментальное решение

$$\mathscr{E}(y)=\frac{\sqrt{2}}{2\omega}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{\omega|y|}\,J_{1/2}(\omega|y|)=\frac{\sin\omega|y|}{2\omega},\quad y\in\mathbf{R} \tag{5.26}$$

(см. формулу (1.11) главы 1), поскольку $\nu_0=\frac{1}{2}$, $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, а $J_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z$ [71]. С другой стороны, $\frac{\cos\omega|y|}{2\omega}$ — целая функция от y и, следовательно, она удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца (при $n=1$). Поэтому наряду с (5.26), фундаментальными решениями оператора $\frac{d^2}{dy^2}+\omega^2$ являются также функции

$$\mathscr{E}_1^{\pm}(y)=\frac{\sin\omega|y|}{2\omega}\mp i\frac{\cos\omega|y|}{2\omega}=\pm\frac{e^{\pm i\omega|y|}}{2i\omega}, \tag{5.27}$$

что совпадает с формулой (2.11′) главы 1 при $k=1$.

2) Аналогично, при $n=3$ из (5.20) получаем $\left(\nu_0=-\frac{1}{2}\right)$

$$\mathscr{E}(y)=-\frac{\omega}{4\pi\sqrt{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(\omega|y|)^{-1/2}J_{-1/2}(\omega|y|)=$$
$$=-\frac{1}{4\pi|y|}\cos\omega|y|, \tag{5.28}$$

и поскольку $\frac{\sin\omega|y|}{|y|}$ — целая функция от y, то она удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца (при $k=3$) и мы получаем также фундаментальные решения для $\Delta+\omega^2$ в $\mathbf{R}^3$ вида $\mathscr{E}_3^{\pm}=-\frac{e^{\pm i\omega|y|}}{4\pi|y|}$, что совпадает с формулой (2.11′) главы 1.

Теперь рассмотрим случай, когда $m=0$, $q>0$, и $Q=-\Delta+q$. Тогда $qB(y)<0$ при $y\in\mathbf{R}^n\setminus 0$ и $\sqrt{qB(y)}$ — мнимая величина при $y\neq 0$. Поэтому фундаментальное решение (3.23) содержит бесселевы функции от мнимого аргумента. Покажем, что при $n\neq 2$ фундаментальное решение можно по-прежнему построить в виде (5.14). Нужно лишь уточнить какую ветвь $(qB)^{r+\nu}$ брать в (5.14) для $qB<0$ и $\nu\in\mathbf{C}$. Положим для конкретности

$$(qB)^{r+\nu}=(-q)^{r+\nu}|B|^{r+\nu},$$

где

$$(-q)^{r+\nu}\equiv e^{\pi i(r+\nu)}|q|^{r+\nu}, \tag{5.29}$$

т. е. разрез степенной функции $z^{r+\nu}$ выберем по отрицательной части мнимой оси: от $-i\infty$ до 0. Тогда все вычисления (5.16)—(5.25) с точностью до знака остаются справедливыми при замене q на $-q$, и B на $|B|$.

Следовательно, учитывая, что $J_\nu(iz)=e^{\frac{\pi i\nu}{2}}I_\nu(z)$, получаем из (5.20) для оператора $-\Delta+q$ при $n\neq 2$ фундаментальное решение вида

$$\mathscr{E}_{\nu_0}(y)=\frac{q^{n/2-1}}{(n-2)\,\Omega_n 2^{n/2-1}}\times$$
$$\times[\Gamma(\nu+1)(\sqrt{q|B|})^{\nu}I_\nu(\sqrt{q|B(y)|})]|_{\nu=\nu_0}, \tag{5.30}$$

где правая часть определяется в точке $\nu=\nu_0\equiv-\frac{n-2}{2}$ как аналитическое продолжение из области $\operatorname{Re}\nu>0$.

При $n=2$ из (5.24) и (5.25) заменой q на $-q$ и B на $|B|$ получаем фундаментальные решения оператора $\Delta-q$ на плоскости (см. [41]):

$$\mathscr{E}(y)=\frac{1}{4}Y_0(i\sqrt{q|B(y)|}),\quad -\frac{i}{4}H_0^{(1)}(i\sqrt{q|B|})=-\frac{1}{2\pi}K_0(\sqrt{q|B|}),$$
$$\frac{i}{4}H_0^{(2)}(i\sqrt{q|B|})=-\frac{1}{2\pi}K_0(-\sqrt{q|B|}). \tag{5.31}$$

Пример 5.3. Аналогично, при $n=1$ из (5.26) и (5.27) получаем заменой $\omega=im_0$ фундаментальные решения для $\frac{d^2}{dy^2}-m_0^2$, $m_0>0$:

$$\mathscr{E}(y)=\frac{\sin im_0|y|}{2im_0}=\frac{\operatorname{sh} m_0|y|}{2m_0}, \quad \mathscr{E}_1^{\pm}(y)=\mp\frac{e^{\mp m_0|y|}}{2m_0}. \qquad (5.32)$$

Наконец, при $n=3$ и из (5.28) из формулы (2.11′) главы 1 (при $k=3$) получаем фундаментальные решения для оператора $\triangle-m_0^2$ в $\mathbf{R}^3$:

$$\mathscr{E}(y)=-\frac{1}{4\pi|y|}\operatorname{ch} m_0|y|, \quad \mathscr{E}_3^{\pm}(y)=-\frac{1}{4\pi|y|}e^{\mp m_0|y|}. \qquad (5.33)$$

§ 6. Об особенностях фундаментальных решений уравнений второго порядка с вещественными коэффициентами и невырожденной квадратичной формой

Проанализируем особенности фундаментальных решений уравнения (3.1) с невырожденной квадратичной формой, построенные в §§ 4, 5. Оператор P из (3.1) при условии (3.2) удовлетворяет условиям теоремы 4.2′ главы 3. Поэтому для фундаментальных решений оператора P справедливо утверждение следствия 4.2 главы 3. Проверим, что для фундаментальных решений $\mathscr{E}$, построенных нами в §§ 4, 5, это действительно так. Для этого найдем сингулярный носитель построенных функций $\mathscr{E}(x)$.

Из формул §§ 4, 5 видно, что $\operatorname{sing\,supp}\mathscr{E}$ в координатах y содержится в множестве

$$Q=\{y\in\mathbf{R}^n : B(y)\equiv(By,\, y)=0\}. \qquad (6.1)$$

Если $m=0$ или $m=n$, то уравнение (3.8) (и (3.1)) — эллиптическое, и фундаментальное решение $\mathscr{E}(y)$ — гладкое при $y\neq 0$, что соответствует теореме 5.1 главы 3. Пусть теперь $1\leqslant m\leqslant n-1$. Тогда Q — коническая поверхность в $\mathbf{R}^n$.

В исходных координатах $x=Cy$ уравнение для Q записывается в виде

$$Q=\{x\in\mathbf{R}^n : B(C^{-1}x)\equiv((C^{-1})^t BC^{-1}x,\; x)=0\}. \qquad (6.2)$$

Но $B=B^{-1}$, ввиду (3.6). Поэтому из (3.5) вытекает, что $(C^{-1})^t BC^{-1}=A^{-1}$ и (6.2) можно записать в виде

$$Q=\{x\in\mathbf{R}^n : (A^{-1}x,\, x)=0\}. \qquad (6.2')$$

П р е д л о ж е н и е 6.1. Множество Q является проекцией на $\mathbf{R}^n$ множества всех бихарактеристик уравнения (3.1), выходящих из точек слоя $T_0^*\mathbf{R}^n$ над точкой $x=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (4.5) главы 3 для характеристического конуса K оператора P имеет вид

$$P_2(\xi)\equiv(A\xi,\, \xi)=0. \qquad (6.3)$$

Ввиду замечания 4.3 главы 3, нужно доказать, что векторы $x\in Q$ являются перпендикулярами к касательным плоскостям «конуса» (6.3). Но если $\xi\in K\setminus 0$, то перпендикуляр к $T_\xi K$ пропорционален $\operatorname{grad}(A\xi, \xi)=2A\xi$. Остается доказать, что вектор $x=A\xi$ удовлетворяет уравнению (6.2′), если ξ удовлетворяет (6.3). Но это очевидно, поскольку

$$(A^{-1}x, x)=(\xi, A\xi)=0. \tag{6.4}$$

Итак, $\operatorname{sing\,supp}\mathscr{E}\subset Q$ и Q является проекцией на $\mathbf{R}^n$ семейства бихарактеристик. Это соответствует следствию 4.2 главы 3. Отметим также, что фундаментальные решения (4.10) и (5.12) имеют особенности лишь на половинках проекций бихарактеристик. Это также соответствует следствию 4.2 главы 3. Наконец, построенные в §§ 4, 5 фундаментальные решения $\mathscr{E}(y)$ являются наиболее регулярными в следующем смысле. В $\operatorname{sing\,supp}\mathscr{E}$ не входят проекции бихарактеристик, не проходящие через точку $y=0$. Оказывается, это есть проявление общей закономерности.

Теорема 6.1 ([23], [55]). Для любого однородного оператора P, удовлетворяющего условиям теоремы 4.2′ главы 3, всегда существует фундаментальное решение $\mathscr{E}$, у которого $\mathrm{WF}(\mathscr{E})$ состоит из объединения половин бихарактеристик, выходящих из $0\times\mathbf{R}^{n*}$, и никакая бихарактеристика не лежит целиком в $\mathrm{WF}(\mathscr{E})$. Соответственно, при этом $\operatorname{sing\,supp}\mathscr{E}$ состоит из объединения проекций этих половин бихарактеристик.

Глава 5

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Краевые задачи в полупространстве $\mathbf{R}_+^n\equiv\{x\in\mathbf{R}^n : x_n>0\}$ являются «модельными» для общих краевых задач в областях с гладкой границей. Для уравнений с постоянными коэффициентами они допускают явное решение. Анализ этого решения позволяет понять основные закономерности теории краевых задач. В частности, можно определить, какое число краевых условий нужно задавать на границе $x_n=0$, чтобы краевая задача имела решение, и притом единственное, при любых граничных данных из заданного класса функций на границе. Это число, грубо говоря, равно количеству корректных по Петровскому корней соответствующего характеристического уравнения. Например, задача Коши, в которой число краевых условий равно порядку уравнения по $\dfrac{\partial}{\partial x_n}$, корректна лишь если все корни корректны по Петровскому. Такие уравнения называются *корректными по Петровскому*. К этому типу принадлежат все гиперболические и параболические уравнения, и уравнение Шрёдингера. С другой стороны, эллиптические уравнения порядка m в $\mathbf{R}^n$ при $n\geqslant3$ имеют ровно $\frac{m}{2}$ корректных по Петровскому корней (m — четное при $n \geqslant 3$ согласно предложению 5.1 главы 3), и поэтому для них нужно задавать $\frac{m}{2}$ краевых условий.

Основной метод исследования краевых задач в полупространстве — *касательное преобразование Фурье*, т. е. частичное преобразование Фурье по переменным $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \equiv x'$ в граничной плоскости $x_n=0$ к R_+^n.

§ 1. Уравнения с постоянными коэффициентами в полупространстве

1.1. Общее решение уравнения (0.1) в полупространстве. Рассмотрим уравнение (0.1) в полупространстве R_+^n в случае $f(x) \equiv 0$:

$$P(\partial_x) u(x) = 0, \quad x_n > 0. \tag{1.1}$$

Решение u будем искать в классах функций (см. (3.1), глава 2)

$$U^{(r)} = \bigcup_{s \in R} C^{(r)}(0, \infty; H_s(R^{n-1})) \subset \mathscr{D}'(R^n_+),$$
$$U^{(r)}_\alpha = \bigcup_{s \in R} C^{(r)}_\alpha(0, \infty; H_s(R^{n-1})) \subset \mathscr{D}'(R^n_+), \tag{1.2}$$

где $r=0, 1, 2, \ldots, \alpha \in R$, а

$$C^{(r)}_\alpha = \{u \in C^{(r)}(0, \infty; H_s(R^{n-1})) \colon \sup_{x_n \geqslant 0} e^{-\alpha x_n} \| u(\cdot, x_n) \|_s < \infty\}. \tag{1.3}$$

Грубо говоря, функции $u \in U^{(r)}_0$ ограничены по x_n, а $u \in U^{(r)}_\alpha$ растут (или убывают) как $e^{\alpha x_n}$ при $x_n \to \infty$.

Найдем общее решение уравнения (1.1) в классах $U^{(r)}$. Для этого применим к (1.1) обобщенное преобразование Фурье $F_{x' \to \xi'}$ по «касательным» переменным $x' \equiv (x_1, \ldots, x_{n-1})$ при $x_n > 0$. Например, для $u \in C_0^\infty(R^n)$

$$\tilde{u}(\xi', x_n) \equiv F_{x' \to \xi'} u(x', x_n) \equiv \int_{R^{n-1}} e^{i\xi' \cdot x'} u(x', x_n)\, dx', \quad \xi' \in R^{n-1}, \quad x_n > 0. \tag{1.4}$$

При этом уравнение (1.1) переходит в

$$P\left(-i\xi', \partial_{x_n}\right) \tilde{u}(\xi', x_n) = 0 \text{ п. в. } \xi' \in R^{n-1}, \quad x_n > 0. \tag{1.5}$$

Это уравнение выполняется при п. в. $\xi' \in R^{n-1}$ в смысле обобщенных функций от $x_n > 0$. Таким образом, (1.5) — это обыкновенное дифференциальное уравнение на полуоси $x_n > 0$, зависящее от параметра $\xi' \in R^{n-1}$. Это основной технический прием решения уравнений в полупространстве.

Запишем характеристическое уравнение для (1.5) в виде

$$P(-i\xi', \lambda) = \sum_{j=0}^{\nu} p_{(j)}(\xi')\lambda^j = 0, \quad \text{где } \nu \leqslant m \text{ и } p_{(\nu)}(\xi') \not\equiv 0. \quad (1.6)$$

Это значит, что ν — порядок оператора $P(\partial_x)$ по ∂_{x_n}.

Равенство $\nu = m$ эквивалентно тому, что $P_m(0, \ldots, 0, 1) \neq 0$, т. е. граница $\partial\mathbf{R}^n_+$ полупространства $\mathbf{R}^n$ не является характеристической для оператора $P(\partial_x)$ (см. определение 4.1 главы 3).

Уравнение (1.6) при п. в. $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$ (при которых $p_{(\nu)}(\xi') \neq 0$) имеет ν корней

$$\lambda = \lambda_1(\xi'), \ldots, \lambda_\nu(\xi'), \quad (1.7)$$

считая с кратностью.

Для простоты в дальнейшем мы всюду предполагаем, что корни $\lambda_k(\xi')$ при п. в. $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$ являются простыми:

$$\lambda_k(\xi') \neq \lambda_j(\xi') \text{ при } k \neq j, \text{ п. в. } \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}. \quad (1.8)$$

Иногда будем также требовать это для всех $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$:

$$\lambda_k(\xi') \neq \lambda_j(\xi') \text{ при } k \neq j, \ \forall \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}. \quad (1.8')$$

Тогда общее решение уравнения (1.5) имеет вид

$$\tilde{u}(\xi', x_n) = \sum_{k=1}^{\lambda} C_k(\xi') e^{\lambda_k(\xi')x_n}, \quad \text{п. в. } \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}, \quad x_n > 0. \quad (1.9)$$

Общий случай кратных корней исследуется аналогично.

Упорядочим $\lambda_k(\xi')$ по возрастанию вещественной части:

$$\mathrm{Re}\lambda_1(\xi') \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{Re}\lambda_\nu(\xi'), \quad \text{п. в. } \xi' \in \mathbf{C}^{n-1}. \quad (1.10)$$

Известно [53], что $\lambda_k(\xi')$ можно выбрать непрерывными функциями от $\xi' \in \mathbf{C}^{n-1}$ в области, где $p_\nu(\xi') \neq 0$.

Заметим, что модуль k-го слагаемого в (1.9) ограничен при $x_n > 0$, если $\mathrm{Re}\lambda_k(\xi') \leqslant 0$ и экспоненциально растет при $x_n \to +\infty$, если $\mathrm{Re}\,\lambda_k(\xi') > 0$.

Для $\alpha \in \mathbf{R}$ обозначим через $\nu_\alpha = \nu_\alpha(\xi')$ количество корней $\lambda_k(\xi')$, у которых $\mathrm{Re}\,\lambda_k(\xi') \leqslant \alpha$:

$$\mathrm{Re}\,\lambda_1(\xi') \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{Re}\,\lambda_{\nu_\alpha}(\xi') \leqslant \alpha < \mathrm{Re}\,\lambda_{\nu_\alpha+1}(\xi') \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{Re}\lambda_\nu(\xi'),$$
$$\text{п. в. } \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}. \quad (1.11)$$

Тогда для того, чтобы $u \in U_\alpha^{(r)}$, где u — функция из (1.9), необходимо, чтобы

$$C_k(\xi') = 0 \text{ при } k > \nu_\alpha(\xi'), \quad \text{п. в. } \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}, \quad (1.12)$$

и, соответственно, для общего решения уравнения (1.1) из класса $U_\alpha^{(r)}$

$$\tilde{u}(\xi', x_n) = \sum_{k=1}^{\nu_\alpha(\xi')} C_k(\xi') e^{\lambda_k(\xi')x_n}, \quad \text{п. в. } \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}, \quad x_n > 0, \quad (1.12')$$

при некоторых $C_k(\xi')$.

Определение 1.1. 1) *Корень* $\lambda_k(\xi')$ уравнения (1.6) называется *корректным по Петровскому*, если

$$\bar{\alpha}_k \equiv \sup_{\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}} \operatorname{Re} \lambda_k(\xi') < \infty, \qquad (1.13)$$

и *α-корректным*, если $\bar{\alpha}_k \leqslant \alpha$; *устойчивым*, если $\bar{\alpha}_k \leqslant 0$ и *неустойчивым*, если $\bar{\alpha}_k > 0$.

2) *Уравнение* (1.1) и *оператор* $P(\partial_x)$ называются *корректными по Петровскому*, если все корни $\lambda_k(\xi')$, $k=1,\ldots,\nu$ являются корректными по Петровскому, и *α-регулярным*, если число $\nu_\alpha(\xi')$ не зависит от ξ' при п. в. $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$

$$\nu_\alpha(\xi') \equiv \nu_\alpha, \quad \text{п. в. } \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}. \qquad (1.14)$$

Если уравнение корректно по Петровскому, то оно α-регулярно при всех $\alpha \geqslant \bar{\alpha}_\nu$. Отметим, что $\bar{\alpha}_1 \leqslant \ldots \leqslant \bar{\alpha}_\nu$.

1.2. Классификация уравнений в полупространстве.

Определение 1.2. *Оператор* $P(\partial_x)$ называется *гиперболическим* (*по Гордингу*) в $\mathbf{R}^n_+$, если он корректен по Петровскому и граница $x_n=0$ не является характеристической для оператора P (т. е. $\nu=m$).

Предложение 1.1 ([55]). Если P — гиперболический оператор в $\mathbf{R}^n_+$, то его главная часть P_m — также гиперболический оператор в $\mathbf{R}^n_+$.

Действительно, $P_m(-i\xi, \lambda) = \lim\limits_{t\to\infty} t^{-m} P(-it\xi, t\lambda)$. Поскольку все корни $t\lambda$ многочлена $t^{-m}P(-it\xi, t\lambda)$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \leqslant \bar{\alpha}_m$, то все корни λ многочлена $P_m(-i\xi, \lambda)$ лежат в полуплоскости, $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$.

Предложение 1.2 ([55]). Если $P=P_m$ — однородный гиперболический оператор, то его корни $\lambda^0_k(\xi')$ — чисто мнимые при $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus 0$.

Действительно, для однородного многочлена

$$P_m(-it\xi', t\lambda) = t^m P_m(-i\xi', \lambda) \quad \forall t \in C, \ (\xi', \lambda) \in \mathbf{C}^n. \qquad (1.15)$$

Следовательно, если λ^0_k — корни многочлена $P_m(-i\xi', \cdot)$, то $t\lambda^0_k$ — корень многочлена $P_m(-it\xi', \cdot)$ $\forall t \in \mathbf{R}$. Но $\operatorname{Re} t\lambda^0_k$ не может быть ограниченной при $t \in \mathbf{R}$, если $\operatorname{Re}\lambda^0_k \neq 0$.

Следствие 1.1. При любых $\alpha \geqslant 0$ все корни однородного гиперболического оператора P являются α-корректными, а P является α-регулярным при любых $\alpha \in \mathbf{R}$.

Отметим, что из (1.15) и (1.10) вытекает

$$\lambda^0_k(t\xi') = t\lambda^0_k(\xi') \ \forall t>0, \ \xi' \in \mathbf{C}^{n-1} \setminus 0. \qquad (1.15')$$

Определение 4.2 строгой гиперболичности из главы 3 очевидно, эквивалентно следующему.

Определение 1.3 ([34], [55]). Оператор $P(\partial_x)$ называется *строго гиперболическим по Петровскому*, если корни $\lambda_k^0(\xi')$, $k=1, \ldots, m$, соответствующие его старшей части $P_m(\partial_x)$, различные и чисто мнимые при $\forall \xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus 0$.

Предложение 1.3. ([55]). Для того чтобы любой оператор $P(\partial_x)$ с заданной главной частью $P_m(\partial_x)$ был гиперболическим, необходимо и достаточно, чтобы P_m был строго гиперболическим.

Примеры строго гиперболических уравнений.

1) Волновое уравнение

$$\Box u \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} u - a^2 \Delta u(x, t) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^k, \tag{1.16}$$

имеет вид (1.1) с $n=k+1$, $x_n \equiv t$. Поэтому для него характеристическое уравнение (1.6) имеет вид $\lambda^2 + a^2|\xi|^2 = 0$, $\xi \in \mathbf{R}^k$ (мы пишем ξ вместо ξ') и $\lambda_{1,2}(\xi) = \pm ia|\xi|$, и для общего решения $u \in V_0^{(r)}$, согласно (1.12′), получаем

$$\tilde{u}(\xi, t) = C_1(\xi) e^{ia|\xi|t} + C_2(\xi) e^{-ia|\xi|t} = A(\xi) \cos a|\xi| t + \\ + B(\xi) \sin a|\xi| t. \tag{1.16′}$$

2) Аналогично, для уравнения Клейна—Гордона

$$\left(\Box + m_0^2\right) u(x, t) = 0, \quad t > 0, \ x \in \mathbf{R}^k, \tag{1.17}$$

корни $\lambda_{1,2} = \pm i\omega(\xi)$, где $\omega(\xi) = \sqrt{a^2|\xi|^2 + m_0^2}$ и для общего решения $u \in U_0^{(r)}$ имеем

$$\tilde{u}(\xi, t) = A(\xi) \cos \omega(\xi) t + B(\xi) \sin \omega(\xi) t. \tag{1.17′}$$

3) Для *волнового уравнения с трением*

$$\left(\Box + K \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x, t) = 0, \quad t > 0, \ x \in \mathbf{R}^k; \quad K > 0, \tag{1.18}$$

характеристическое уравнение $\lambda^2 + a^2|\xi|^2 + K\lambda = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = -\frac{K}{2} \pm \sqrt{\frac{K^2}{4} - a^2|\xi|^2}$. Поэтому для общего решения $u \in U_0^{(r)}$ получаем

$$\tilde{u}(\xi, t) = \begin{cases} C_1(\xi) e^{\left(-\frac{K}{2} - \mu(\xi)\right)t} + C_2(\xi) e^{\left(-\frac{K}{2} + \mu(\xi)\right)t} & \text{при } a|\xi| < \frac{K}{2}; \\ e^{-\frac{K}{2}t} \left(A(\xi) \cos \omega(\xi) t + B(\xi) \sin \omega(\xi) t\right) & \text{при } a|\xi| > \frac{K}{2}, \end{cases} \tag{1.18′}$$

где $\mu(\xi) = \sqrt{\frac{K^2}{4} - a^2|\xi|^2}$, $\omega(\xi) = \sqrt{a^2|\xi|^2 - \frac{K^2}{4}}$.

4) При другом варианте введения трения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + K\right)^2 u(x, t) = a^2 \Delta u, \quad t > 0, \ x \in \mathbf{R}^k, \tag{1.19}$$

корни $\lambda_{1,2}=-K\pm ia|\xi|$ и для общего решения $u\in U_0^{(r)}$ получаем

$$\tilde{u}(\xi,t)=e^{-Kt}\left(C_1(\xi)e^{ia|\xi|t}+C_2(\xi)e^{-ia|\xi|t}\right). \qquad (1.19')$$

Отметим, что все уравнения (1.16)—(1.19) α-регулярны при $\alpha\geqslant 0$ и для них $\nu_\alpha=2$ при $\alpha\geqslant 0$. Уравнение (1.18) не является α-регулярным при $\alpha\in]-K, 0[$.

Определение 5.1 главы 3 эллиптического оператора, очевидно, эквивалентно следующему:

Определение 1.4. Оператор $P(\partial_x)$ называется *эллиптическим*, если граница $x_n=0$ не является характеристической, т. е. $\nu=m$ и

$$\operatorname{Re}\lambda_k^0(\xi')\neq 0,\ k=1,\ldots,m \quad \text{при } \xi'\in\mathbf{R}^{n-1}\diagdown 0, \qquad (1.20)$$

где $\lambda_k^0(\xi')$ — корни, соответствующие старшей части $P(\partial_x)$ оператора P.

Предложение 1.4 ([11], [55]). Если $P(\partial_x)$ — эллиптический оператор и $n\geqslant 3$, то $m=2l$ — четное число и количество $\nu_-(\xi')$ корректных по Петровскому корней λ_k равно l.

Четность m при $n\geqslant 3$ вытекает из предложения 5.1 главы 3.

Для однородного оператора $P_m(\partial_x)$, ввиду (1.15'), все корни λ_k^0 с $\lambda_k^0<0$ — корректны по Петровскому, а с $\operatorname{Re}\lambda_k^0(\xi')>0$ — не корректны по Петровскому. Отсюда легко вывести предложение 1.4 в случае $P=P_m$. Общий случай, когда $P\neq P_m$, сводится к рассмотренному при помощи следующей леммы.

Лемма 1.1. Если граница $x_n=0$ для оператора $P(\partial_x)$ нехарактеристическая, то корни $\lambda_k(\xi')$, соответствующие оператору $P(\partial_x)$, и $\lambda_k^0(\xi')$, соответствующие $P_m(\partial_x)$, имеют «одинаковую» асимптотику при $|\xi'|\to\infty$:

$$\lambda_k(\xi')=\lambda_k^0(\xi')+o(|\xi'|), \quad |\xi'|\to\infty \quad \xi'\in\mathbf{C}^{n-1}. \qquad (1.21)$$

Доказательство. Возьмем $\xi'\in\mathbf{C}^{n-1}$. Тогда для $\lambda_k^0(\xi')$ и отношений $\lambda_k(t\xi')/t$ уравнения имеют асимптотически одинаковый вид (см. (1.6)):

$$\begin{cases} 0=\dfrac{P(-it\xi',\lambda_k(t\xi'))}{t^m}=\displaystyle\sum_{j=0}^{m}\frac{p_{(j)}(t\xi')}{t^{m-j}}\left(\frac{\lambda_k(t\xi')}{t}\right)^j, \\ 0=P_m(-i\xi',\lambda_k^0(\xi'))=\displaystyle\sum_{j=0}^{m}p_{(j)}^0(\xi')(\lambda_k^0(\xi'))^j. \end{cases} \qquad (1.22)$$

Но при $t\to\infty$

$$\frac{p_{(j)}(t\xi')}{t^{m-j}}\to p_{(j)}^0(\xi') \text{ и } p_{(m)}(\xi')=p_{(m)}^0(\xi')=P_m(0,\ldots 0,1)\neq 0. \qquad (1.23)$$

Следовательно, при $t\to+\infty$

$$\lambda_k(t\xi')/t\to\lambda_k^0(\xi'). \qquad (1.24)$$

Следствие 1.2. Из (1.21) вытекает, что для эллиптического оператора $P(\partial_x)$ при $n\geqslant 3$ в соответствии с нумерацией (1.10)

$$\operatorname{Re}\lambda_k(\xi')\to\begin{cases}-\infty, & \text{при } k\leqslant l\\ +\infty, & \text{при } k>l,\end{cases} \tag{1.25}$$

поскольку то же верно для корней $\lambda_k^0(\xi')$.

Предложение 1.4 доказано.

Примеры эллиптических уравнений.

1) Для уравнения Лапласа

$$\Delta u(x)=0,\ x_n>0,\ x'\equiv(x_1,\ldots,x_{n-1})\in\mathbf{R}^{n-1} \tag{1.26}$$

характеристическое уравнение $-|\xi'|^2+\lambda^2=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=\mp|\xi'|$ и для общего вида решения $u\in U_0^{(r)}$ получаем

$$\tilde u(\xi',x_n)=C_1(\xi')\,e^{-|\xi'|x_n}. \tag{1.26'}$$

2) Аналогично, для уравнения

$$\Delta u-qu(x)=0,\quad x_n>0,\quad x'\in\mathbf{R}^{n-1};\quad q>0, \tag{1.27}$$

корни $\lambda_{1,2}=\mp\sqrt{|\xi'|^2+q}$ и для общего решения $u\in U_0^{(r)}$ получаем

$$\tilde u(\xi',x_n)=C_1(\xi')\,e^{-\sqrt{|\xi'|^2+q}\,x_n}. \tag{1.27'}$$

3) Для уравнения Гельмгольца

$$\Delta u+\omega_0^2u(x)=0,\quad x_n>0,\quad x'\in\mathbf{R}^{n-1},\quad \omega_0\in\mathbf{R}\diagdown 0, \tag{1.28}$$

корни $\lambda_{1,2}=\mp\sqrt{|\xi'|^2-\omega_0^2}$. Поэтому для общего решения $u\in U_0^{(r)}$ получаем $\left(\omega\equiv\sqrt{\omega_0^2-|\xi'|^2}\right)$

$$\tilde u(\xi',x_n)=\begin{cases}C_1(\xi')\,e^{i\omega x_n}+C_2(\xi')\,e^{-i\omega x_n} & \text{при } |\xi'|<|\omega_0|,\\ C_1(\xi')\,e^{-\sqrt{|\xi'|^2-\omega_0^2}\,x_n} & \text{при } |\xi'|>|\omega_0|.\end{cases} \tag{1.28'}$$

4) Для *уравнения Коши—Римана*

$$\frac{\partial}{\partial\bar z}u(x_1,x_2)\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{i\partial u}{\partial x_2}\right)=0,\quad x_2>0,\quad x_1\in R, \tag{1.29}$$

корень $\lambda=\xi_1$ и для общего решения $u\in U_0^{(r)}$ получаем

$$\tilde u(\xi_1,x_2)=\begin{cases}C_1(\xi_1)\,e^{\xi_1x_2} & \text{при } \xi_1\leqslant 0,\\ 0 & \text{при } \xi_1>0.\end{cases} \tag{1.29'}$$

Уравнение (1.26) является α-регулярным только при $\alpha=0$, (1.27) — при $\alpha\in[-\sqrt{q},\sqrt{q}]$; уравнения (1.28) и (1.29) не являются α-регулярными ни при каком $\alpha\in\mathbf{R}$.

Из следствия 1.2 вытекает

П р е д л о ж е н и е 1.5. Эллиптический оператор $P(\partial_x)$ при $n\geqslant 3$ является α-регулярным лишь при $\alpha\in[\overline{\alpha}_l, \underline{\alpha}_{l+1}]$, если $\overline{\alpha}_l\leqslant\underline{\alpha}_{l+1}\equiv\inf\limits_{\xi'\in\mathbf{R}^{n-1}}\operatorname{Re}\lambda_{l+1}(\xi')$; при этом $\nu_\alpha=\frac{m}{2}$.

О п р е д е л е н и е 1.5. Уравнение (1.1) называется *h-параболическим по Шилову* ($h\in\mathbf{R}$), если при некоторых $C_1>0$, $C_2\in\mathbf{R}$

$$\operatorname{Re}\lambda_k(\xi')\leqslant -C_1|\xi'|^h+C_2 \text{ при } \xi'\in\mathbf{R}^{n-1},\ \forall k=1,\ldots,\nu. \tag{1.30}$$

Очевидно, любое параболическое по Шилову уравнение является корректным по Петровскому и является α-регулярным при $\forall\alpha\geqslant\overline{\alpha}_\nu$.

П р и м е р ы п а р а б о л и ч е с к и х у р а в н е н и й.

1) Уравнение теплопроводности (или диффузии)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u(x, t),\quad t>0,\quad x\in\mathbf{R}^k;\quad a>0, \tag{1.31}$$

имеет вид (1.1) с $n=k+1$ и $x_n\equiv t$. Оно является 2-параболическим по Шилову, $\lambda_1=-a^2|\xi|^2$, и для $u\in U_0^{(r)}$ получаем

$$\tilde{u}(\xi, t)=c_k(\xi)\,e^{-a^2|\xi|^2t}. \tag{1.31'}$$

2) *Уравнение теплопроводности с поглощением* (или *рождением*, если $q<0$)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u(x, t)-qu,\quad t>0,\quad x\in\mathbf{R}^k;\quad a>0,\quad q\in\mathbf{R}, \tag{1.32}$$

также 2-параболическое по Шилову, $\lambda_1=-a^2|\xi|^2-q$ и для $u\in U_0^{(r)}$ получаем

$$\tilde{u}(\xi, t)=\begin{cases} C_1(\xi)\,e^{-(a^2|\xi|^2+q)t}, & a^2|\xi|^2\geqslant -q,\\ 0, & a^2|\xi|^2<-q.\end{cases} \tag{1.32'}$$

Уравнение (1.32) является α-регулярным при $\alpha\geqslant -q$ и тогда $\nu_\alpha=1$, и оно не является α-регулярным при $\alpha<-q$.

О п р е д е л е н и е 1.6. Уравнение (1.1) называется *β-параболическим по Петровскому* ($\beta=1, 2, \ldots$), если

$$p_\alpha=0 \text{ при } |\alpha'|+\beta\alpha_n>\beta\nu, \tag{1.33}$$

а все корни уравнения

$$P_{m,\beta}(\xi', \lambda^0)\equiv\sum_{|\alpha'|+\beta\alpha_n=\nu\beta} p_\alpha(-i\xi')^{\alpha'}(\lambda^0)^{\alpha_n}=0 \tag{1.34}$$

являются *строго устойчивыми* в следующем смысле:

$$\operatorname{Re}\lambda^0(\xi')<0,\quad |\xi'|=1,\quad \xi'\in\mathbf{R}^{n-1}. \tag{1.35}$$

Например, уравнения (1.31) и (1.32) являются 2-параболическими по Петровскому.

Отметим, что (1.35) возможно лишь при четных $\beta=2b$, где $b=1, 2, \ldots$. Действительно, если λ^0 — корень уравнения (1.34) для $\xi'\in\mathbf{R}^{n-1}\setminus 0$, то $t^\beta\lambda^0$ — корень того же уравнения для $t\xi'$. При $t=-1$ и нечетном β это противоречит (1.35).

Предложение 1.6. Если уравнение (1.1) является $2b$-параболическим по Петровскому, то оно также $2b$-параболично по Шилову.

Доказательство. Обозначим корни уравнения (1.34) через $\lambda_k^0(\xi')$. Аналогично (1.15'),

$$\lambda_k^0(t\xi') = t^{2b}\lambda_k^0(\xi'), \quad t>0, \quad \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}\setminus 0. \tag{1.36}$$

Поэтому корни $\lambda_k^0(\xi')$, ввиду (1.35), удовлетворяют нужной оценке (1.30). Остается заметить, что, согласно (1.6) и (1.33),

$$p_{(\nu)}(\xi') \equiv \sum_{\alpha_n=\nu} p_\alpha (-i\xi')^{\alpha'} = p_{(0,\ldots,0,\nu)} \neq 0. \tag{1.37}$$

Поэтому корни $\lambda_k(\xi')$ и $\lambda_k^0(\xi')$ при $|\xi'| \to \infty$ имеют одинаковую асимптотику:

$$\lambda_k(\xi') = \lambda_k^0(\xi') + o(|\xi'|^{2b}). \tag{1.37'}$$

Это следует из леммы 1.1, примененной к оператору $P(\partial_{x'}, \partial_s^{2b})$, поскольку для него плоскость $s=0$ не является характеристической ввиду (1.37).

Замечание 1.1. Классификация уравнений (1.1) в полупространстве на гиперболические, эллиптические и параболические не является полной. Например, для уравнения Шрёдингера

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = ia^2\Delta\psi(x, t), \quad t>0, \quad x\in\mathbf{R}^k; \quad a>0, \tag{1.38}$$

характеристическое уравнение имеет корень $\lambda_1 = -ia^2|\xi|^2$. Поэтому, для $\psi \in U_0^{(r)}$ получаем

$$\tilde{\psi}(\xi, t) = c_1(\xi)\, e^{-ia^2|\xi|^2 t}. \tag{1.38'}$$

Уравнение Шрёдингера не гиперболическое, не эллиптическое и не параболическое по Шилову. Однако оно является α-регулярным при $\forall\alpha\in\mathbf{R}$.

Аналогично, для волнового уравнения с сильным трением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u(x, t) + K\frac{\partial}{\partial t}\Delta u, \quad t>0, \quad x\in\mathbf{R}^k; \quad a>0, \quad K>0, \tag{1.39}$$

характеристическое уравнение $\lambda^2 = -a^2|\xi|^2 - K\lambda|\xi|^2$ имеет корни $\lambda_{1,2} = -\frac{K|\xi|^2}{2} \pm \sqrt{\frac{K^2|\xi|^4}{4} - a^2|\xi|^2}$. Поэтому для $u\in U_0^{(r)}$ получаем

$$\tilde{u}(\xi, t) = C_1(\xi)\, e^{\lambda_1 t} + C_2(\xi)\, e^{\lambda_2 t}. \tag{1.39'}$$

Уравнение (1.39) не принадлежит к типу гиперболических, эллиптических или параболических по Шилову. Однако оно является α-регулярным при $\forall\alpha\geqslant 0$ (и не является α-регулярным при $\alpha<0$).

§ 2. Регулярные краевые задачи в полупространстве в классах ограниченных функций

Как видно из (1.9) уравнение (1.1), в полупространстве имеет, вообще говоря, бесконечное число линейно независимых решений. Действительно, если взять, например $C_k(\xi')\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, то функция

$$u(x',\ x_n)\equiv F^{-1}_{\xi'\to x'}\tilde{u}(\xi',\ x_n)\in U_\alpha^{(r)} \tag{2.1}$$

при некотором достаточно большом $\alpha\,(\alpha\geqslant\max\limits_{\xi'\in\operatorname{supp}C_k}\operatorname{Re}\lambda_k(\xi')$ $\forall k=1,\ldots,\nu)$ и любом $r=1,\ 2,\ldots$, и u является решением уравнения (1.1).

Регулярная, т. е. «правильно» поставленная задача для уравнения (1.1) должна иметь единственное решение. Для этого на u нужно наложить дополнительные ограничения, чтобы из всех решений выбрать одно. В задачах математической физики это обычно достигается заданием краевых условий на границе области. В случае уравнения (1.1) граница области есть гиперповерхность $x_n=0$. Зададим на ней краевые условия вида

$$B_j(\partial_x)\,u(x)\,|_{x_n=0+}=f_j(x'),\quad x'\in\mathbf{R}^{n-1};\quad j=1,\ldots,l, \tag{2.2}$$

где

$$B_j(\partial_x)=\sum_{|\alpha|\leqslant m_j} b_{j\alpha}\partial_x^\alpha. \tag{2.2$'$}$$

Возьмем $r\geqslant\overline{m}\equiv\max\limits_j m_j$. Тогда для $u\in U^{(r)}$ или $u\in U_\alpha^{(r)}$ условия (2.2) имеют смысл, в силу теоремы 3.1 главы 2, как равенства в пространстве $H_{-\infty}(\mathbf{R}^{n-1})\equiv\bigcup\limits_{s\in\mathbf{R}}H_s(\mathbf{R}^{n-1})$.

Наша цель — найти условия на операторы $P,\ B_1,\ldots,B_l$, при которых краевая задача (1.1), (2.2) «правильно» поставлена, в частности, найти число l. Грубо говоря, ответ состоит в том, что в (1.9) нужно отбросить все слагаемые, соответствующие неустойчивым корням (у которых $\operatorname{Re}\lambda_k>0$); l равно числу устойчивых корней (у которых $\operatorname{Re}\lambda_k\leqslant 0$), а значения $(B_j(-i\xi',\ \lambda_k(\xi')))_{k=1}^{l}$ символов на устойчивых корнях должны быть линейно независимы.

2.1. Регулярные краевые задачи.

Определение 2.1. Краевая задача (1.1), (2.2) называется *регулярной* в $U_0^{(r)}$, где $r\geqslant\overline{m}$, если для любых $f_j\in H_{-\infty}(\mathbf{R}^{n-1})$ она имеет решение $u\in U_0^{(r)}$ и притом единственное.

Найдем необходимые условия для того, чтобы задача (1.1), (2.2) была регулярной в $U_0^{(r)}$.

Предположим, что задача (1.1), (2.2) является регулярной в $U_0^{(r)}$ и пусть $u \in U_0^{(r)}$ является ее решением. Тогда, согласно (1.12'),

$$\tilde{u}(\xi', x_n) = \sum_{k=1}^{\nu_0(\xi')} C_k(\xi') e^{\lambda_k(\xi') x_n}, \quad \text{п. в. } \xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus 0, \quad x_n > 0. \tag{2.3}$$

Функции $C_k(\xi')$ находятся из краевых условий (2.2). Для этого нужно применить к (2.2) касательное преобразование Фурье $F_{x' \to \xi'}$ (см. 1.4)) при $x_n = 0$. При этом получим:

$$B_j(-i\xi', \partial_{x_n}) \tilde{u}(\xi', 0+) = \tilde{f}_j(\xi'), \text{ п. в. } \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}, \ j = 1, \ldots, l. \tag{2.4}$$

Подставляя сюда (2.3), получаем

$$\sum_{1}^{\nu_0(\xi')} B_j(-i\xi', \lambda_k(\xi')) C_k(\xi') = \tilde{f}_j(\xi'), \text{ п. в. } \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}, \tag{2.5}$$

$$j = 1, \ldots, l.$$

Поскольку задача (1.1), (2.2) является регулярной в $U_0^{(r)}$, то система (2.5) для любых $\tilde{f}_j(\xi') \in \tilde{H}_{-\infty} \equiv F_{x' \to \xi'} H_{-\infty}(\mathbf{R}^n)$ при п. в. $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$ имеет решение и притом единственное. Отсюда вытекает

Предложение 2.1. Для того чтобы краевая задача (1.1), (2.2) была регулярной в $U_0^{(r)}$, $r \geqslant \overline{m}$, необходимо, чтобы

$$\nu_0(\xi') \equiv \nu_0 = l \text{ при п. в. } \xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \tag{2.6}$$

так, что, в частности, уравнение (1.1) должно быть 0-регулярным; кроме того, матрица $B_{jk}(\xi') \equiv B_j(-i\xi', \lambda_k(\xi'))$ должна быть невырожденной при п. в. $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$:

$$\det(B_{jk}(\xi'))_{j,k=1}^{l} \neq 0 \text{ при п. в. } \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}. \tag{2.6'}$$

Это есть условие типа Шапиро — Лопатинского [27], необходимое для того, чтобы задача (1.1), (2.2) была регулярной в $U_0^{(r)}$. Запишем систему (2.5) в векторном виде

$$B(\xi') C(\xi') = \tilde{F}(\xi'), \text{ п. в. } \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}, \tag{2.7}$$

где $B(\xi') = (B_{jk}(\xi'))$ — матрица $l \times l$, а $C(\xi')$ и $\tilde{F}(\xi')$ — вектор-столбцы с элементами $C_k(\xi')$ и $\tilde{f}_j(\xi')$ соответственно. Тогда, ввиду (2.6'),

$$C(\xi') = B^{-1}(\xi') \tilde{F}(\xi'), \text{ п. в. } \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}. \tag{2.8}$$

Пример 2.1. Для любого оператора $P(\partial_x)$, удовлетворяющего нашему предположению (1.8), краевая задача

$$\partial_{x_n}^{j-1} u(x', 0+) = f_j(x'), \quad j = 1, \ldots, l, \tag{2.9}$$

удовлетворяет условию (2.6'). Действительно, для нее $B_{jk}(\xi') = \lambda_k^{j-1}(\xi')$ и, в силу (1.8),

$$\det B(\xi') = \prod_{k>l} (\lambda_k(\xi') - \lambda_l(\xi')) \neq 0 \text{ при п. в. } \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}. \qquad (2.10)$$

Теперь укажем достаточные условия регулярности краевой задачи (1.1), (2.2). Пусть необходимое условие (2.6) выполнено.

Предложение 2.2. Для того чтобы задача (1.1), (2.2) была регулярной в $U_0^{(r)}$, достаточно, чтобы условие (2.6′) выполнялось при $\forall \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$ (а не при п. в. ξ'):

$$\det B(\xi') \neq 0 \quad \forall \xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \qquad (2.6'')$$

Доказательство. Нужно проверить, что решение u, найденное по формулам (2.1), (2.3), (2.8), принадлежит классу $U_0^{(r)}$, $r \geqslant \overline{m}$. Заметим прежде всего, что из (2.6″) вытекает оценка: при некотором $a \in \mathbf{R}$ и $C > 0$

$$|\det B(\xi')| \geqslant C(1+|\xi'|)^a, \quad \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}. \qquad (2.11)$$

Эта оценка вытекает из теоремы А.2.5 из [55], примененной к полуалгебраической функции от x

$$f(x) \equiv \inf_{|\xi'|=x} |\det B(\xi')|. \qquad (2.12)$$

Полуалгебраичность функции $f(x)$ означает, что множество

$$F \equiv \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \leqslant f(x)\} \qquad (2.13)$$

в $\mathbf{R}^2$ является полуалгебраическим. В свою очередь, полуалгебраичность F вытекает из следствия А.2.4 [55], поскольку $f(x)$ допускает представление вида (А.2.2) из [55]:

$$f(x) = \inf (y > 0 : y^2 = |\det (B_j(-i\xi', \lambda_k))^k_{j,k=1}|^2, \quad |\xi'| = x,$$
$$P(-i\xi', \lambda_k) = 0, \quad \operatorname{Re} \lambda_1 \leqslant \operatorname{Re} \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re} \lambda_l \leqslant 0). \qquad (2.14)$$

Отметим, что все эти результаты из [55] доказываются при помощи принципа Зайденберга—Тарского. Аналогично (2.11) доказывается оценка: при некотором $a_k \in \mathbf{R}$

$$|\lambda_k(\xi')| \leqslant C(1+|\xi'|)^{a_k}, \quad \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}. \qquad (2.15)$$

Отсюда и из (2.11) вытекает, что при некотором $b \in \mathbf{R}$

$$\|B^{-1}(\xi')\| \leqslant C(1+|\xi'|)^b, \quad \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}. \qquad (2.16)$$

Отсюда в силу (2.8) вытекает, поскольку $\tilde{f}_j(\xi') \in \tilde{H}_{-\infty} \equiv \tilde{H}_\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ что также

$$C_k(\xi') \in \tilde{H}_{-\infty}(\mathbf{R}^{n-1}). \qquad (2.17)$$

Остается проверить, что при некотором $s \in \mathbf{R}$ для $\forall j = 0, 1, 2, \ldots$ (а не только при $j \leqslant r$)

$$\|\partial^j_{x_n} u(\cdot, x_n)\|_s \leqslant C_{j,s} < \infty \text{ при } x_n > 0. \qquad (2.18)$$

Но это очевидно: из (2.3) получаем, что

$$\partial_{x_n}^j \tilde{u}(\xi', x_n) = \sum_{k=1}^{\nu_0} C_k(\xi')\lambda_k^j(\xi')e^{\lambda_k x_n}. \tag{2.19}$$

Отсюда, поскольку $\operatorname{Re}\lambda_k(\xi') \leqslant 0$, $k \leqslant \nu_0$, получаем, ввиду (2.15)

$$|\partial_{x_n}^j \tilde{u}(\xi', x_n)|^2 \leqslant C \sum_{k=1}^{\nu_0} |C_k(\xi')|^2 (1+|\xi'|)^{2ja_k}. \tag{2.20}$$

Поэтому, согласно определению 3.1 главы 2, для $\forall s \in \mathbb{R}$

$$\|\partial_{x_n}^j u(\cdot, x_n)\|_s^2 = \int (1+|\xi'|)^{2s} |\partial_{x_n}^j \tilde{u}(\xi', x_n)|^2 d\xi' \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{k=1}^{\nu_0} \int (1+|\xi'|)^{2(s+ja_k)} |C_k(\xi')|^2 d\xi'. \tag{2.21}$$

Остается учесть, что $C_k \in \tilde{H}_{-\infty}$.

Отметим, что s в оценке (2.18) зависит от j, как видно из (2.20).

Замечание 2.1. Если выполняется предположение (1.8′), то краевая задача (2.9) удовлетворяет условию (2.6″) ввиду (2.10).

Предложение 2.3. Если выполняется предположение (1.8′) для k, $j \leqslant \nu_0$, то условие (2.6″) (вместе с (2.6)) является необходимым и достаточным для того, чтобы краевая задача (1.1), (2.2) была регулярной в $U_0^{(r)}$ при $r \geqslant \max(\overline{m}, \nu_0 - 1)$.

Доказательство. Достаточность доказана в предложении 2.2. Для доказательства необходимости заметим, что для $u \in U_0^{(r)}$, по определению (1.2), при $r \geqslant \nu_0 - 1$

$$\partial_{x_n}^{j-1} u(x', 0+) \equiv v_j(x') \in H_{-\infty}(\mathbb{R}^n), \quad j = 1, \ldots, \nu_0. \tag{2.22}$$

Подставляя сюда (2.3) и учитывая, что $\nu_0 = l$ согласно (2.6), получаем для $C_k(\xi')$ систему, аналогичную (2.5):

$$\sum_{k=1}^{l} \lambda_k^{j-1}(\xi') C_k(\xi') = \tilde{v}_j(\xi') \in \tilde{H}_{-\infty}. \tag{2.23}$$

Ее определитель (2.10) удовлетворяет условию (2.6″), ввиду (1.8′). Если задача (1.1), (2.2) регулярна в $U_0^{(r)}$, то при $\forall f_j \in H_{-\infty}(\mathbb{R}^{n-1})$ она имеет решение $u \in U_0^{(r)}$ и тогда $C_k(\xi') \in \tilde{H}_{-\infty}$ $\forall k$, как показано выше. Но ввиду (2.8),

$$C_k(\xi') = \sum_j B_{kj}^{-1}(\xi') \tilde{f}_j(\xi'), \text{ п. в. } \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{2.24}$$

Поэтому, в силу (2.24) функции $B_{kj}^{-1}(\xi')$ локально ограничены, откуда вытекает (2.6″).

2.2. Примеры регулярных краевых задач.

1) *Гиперболическое уравнение Клейна—Гордона* (1.17) имеет вид (1.1) с $n = k+1$ и $x_n = t$. Для него $\lambda_{1,2}(\xi) =$

$=\pm i\sqrt{|\xi|^2+m_0^2}$, $\xi\in\mathbb{R}^k$, так что $\nu_0=2$ и выполняется условие (1.8′) (мы пишем ξ вместо ξ'). Поэтому для (1.17) регулярной в $U_0^{(r)}$ является задача (2.9) с $l=2$ — так называемая *задача Коши* с «начальным» условием

$$u(x, 0+)=u_0(x), \quad \partial_t u(x, 0)=u_1(x), \quad x\in\mathbb{R}^k. \tag{2.25}$$

Подставляя общее решение (1.17′) в (2.25), находим, аналогично (2.5), (2.8): $A(\xi)=u_0(\xi)$ и $B(\xi)=u_1(\xi)/\omega(\xi)$, откуда

$$\tilde{u}(\xi, t)=\tilde{u}_0(\xi)\cos\omega(\xi)t+\frac{\tilde{u}_1(\xi)}{\omega(\xi)}\sin\omega(\xi)t; \quad \omega(\xi)\equiv\sqrt{a^2|\xi|^2+m_0^2}. \tag{2.26}$$

2) Для эллиптического уравнения (1.27) $\nu_0=1$, и регулярными в $U_0^{(r)}$ являются:

а) *задача Дирихле*:

$$u|_{x_n=0+}=u_0(x')\Rightarrow\tilde{u}(\xi', x_n)=\tilde{u}_0(\xi')e^{-\sqrt{|\xi'|^2+q}\,x_n}. \tag{2.27}$$

б) *Задача Неймана*:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{x_n=0+}=u_1(x')\Rightarrow\tilde{u}(\xi', x_n)=-\frac{\tilde{u}_1(\xi')}{\sqrt{|\xi'|^2+q}}e^{-\sqrt{|\xi'|^2+q}\,x_n}. \tag{2.28}$$

в) *Третья краевая задача* (при $\sigma\geqslant0$ или $\operatorname{Im}\sigma\neq0$):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}-\sigma u\right)_{x_n=0+}=f(x')\Rightarrow\tilde{u}(\xi', x_n)= -\frac{\tilde{f}(\xi')}{\sqrt{|\xi'|^2+q}+\sigma}e^{-\sqrt{|\xi'|^2+q}\,x_n}. \tag{2.29}$$

г) *Задача с косой производной* (все $b_k\in\mathbb{R}$ и не все $b_k=0$)

$$\left.\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\right|_{x_n=0+}=f(x')\Rightarrow\tilde{u}(\xi', x_n)= -\frac{\tilde{f}(\xi')e^{-\sqrt{|\xi'|^2+q}\,x_n}}{i\sum\limits_{k=1}^{n-1}b_k\xi_k+b_n\sqrt{|\xi'|^2+q}} \tag{2.30}$$

регулярна в $U_0^{(r)}$, если $b_n\neq0$ или $n=2$.

3) Для уравнения Лапласа (1.26) также $\nu_0=1$, и задача Дирихле регулярна в $U_0^{(r)}$:

$$u|_{x_n=0+}=u_0(x')\Rightarrow\tilde{u}(\xi', x_n)=\tilde{u}_0(\xi')e^{-|\xi'|x_n}. \tag{2.31}$$

Аналогично и для третьей краевой задачи (2.29) при $\sigma>0$ или при $\operatorname{Im}\sigma\neq0$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}-\sigma u\right)_{x_n=0+}=f(x')\Rightarrow\tilde{u}(\xi', x_n)=-\frac{\tilde{f}(\xi')}{|\xi'|+\sigma}e^{-|\xi'|x_n}. \tag{2.32}$$

4) Параболическое уравнение (1.32) имеет вид (1.1) с $n=k+1$ и $x_n=t$. Для него $\nu_0=1$ при $q\geqslant 0$, и регулярной в $U_0^{(r)}$ является задача Коши с начальным условием

$$u(x, 0+)=u_0(x) \Rightarrow \tilde{u}(\xi, t)=\tilde{u}_0(\xi)\, e^{-(a^2|\xi|^2+q)t}. \qquad (2.33)$$

5) Для уравнения Шрёдингера (1.38) также $\nu_0=1$ и для него регулярна в $U_0^{(r)}$ задача Коши с начальным условием

$$\psi(x, 0+)=\psi_0(x) \Rightarrow \tilde{\psi}(\xi, t)=\tilde{\psi}_0(\xi)\, e^{-ia^2|\xi|^2 t}. \qquad (2.34)$$

6) Определение 2.2. *Задачей Коши* для общего уравнения (1.1) называется задача с условиями вида (2.9), где $l=\nu$.

Для регулярности этой задачи в $U_0^{(r)}$, согласно предложению 2.1, необходимо, чтобы $\nu_0(\xi')\equiv\nu$ (условие (2.6) с $l=\nu$) и, согласно замечанию 2.1 и предложению 2.2, достаточно, чтобы, кроме того, выполнялось условие (1.8′).

§ 3. Регулярные краевые задачи в классах экспоненциально растущих функций

3.1. Определение и примеры. Определение 3.1. Краевая задача (1.1), (2.2) называется *регулярной* в классе $U_\alpha^{(r)}$, где $\alpha\in\mathbf{R}$ и $r\geqslant\overline{m}$, если для любых $f_j\in H_{-\infty}(\mathbf{R}^{n-1})$ она имеет решение $u\in U_\alpha^{(r)}$ и притом единственное.

Предложение 3.1. Для того чтобы задача (1.1), (2.2) была регулярной в $U_\alpha^{(r)}$, $r\geqslant\overline{m}$,

1) Необходимо, чтобы, аналогично (2.6),

$$\nu_\alpha(\xi')\equiv\nu_\alpha=l, \text{ п. в. } \xi'\in\mathbf{R}^{n-1}, \qquad (3.1)$$

в частности, чтобы уравнение (1.1) было α-регулярным, и чтобы выполнялось условие (2.6′).

2) Достаточно, чтобы выполнялись условия (3.1) и (2.6″).

3) условие (2.6″) вместе с (3.1) необходимо и достаточно, если условие (1.8′) выполняется для $k, j\leqslant\nu_\alpha$ и $r\geqslant\max(\nu_\alpha-1, \overline{m})$.

Это предложение доказывается совершенно аналогично предложениям 2.1—2.3.

Примеры краевых задач, регулярных в $U_\alpha^{(r)}$.

1) Волновое гиперболическое уравнение (1.16) имеет вид (1.1) с $n=k+1$ и $x_n=t$. Для него $\nu_0=2$, но условие (1.8′) выполняется лишь при $\xi\in\mathbf{R}^k\setminus 0$. Поэтому для него задача Коши с условиями (2.25) удовлетворяет требованиям (2.6), (2.6′), но не удовлетворяет (2.6″). Подставляя (1.16′) в (2.25), находим $A(\xi)=\tilde{u}_0(\xi)$ и $B(\xi)=\tilde{u}_1(\xi)/|\xi|$, откуда

$$\tilde{u}(\xi, t)=\tilde{u}_0(\xi)\cos a|\xi|t+\tilde{u}_1(\xi)\,\frac{\sin a|\xi|t}{|\xi|}. \qquad (3.2)$$

Отсюда, аналогично (2.18)—(2.21), выводится, что при $s \in \mathbb{R}$

$$\| \partial_{x_n}^j u(\cdot, t) \|_s^2 \leqslant C \left(\| u_0 \|_{s+j}^2 + \| u_1 \|_{s+j-1}^2 \cdot t \right) \text{ при } t > 0, \tag{3.3}$$

если $\| u_0 \|_{s+j} < \infty$ и $\| u_1 \|_{s+j-1} < \infty$. Из (3.2) следует, что задача Коши (1.16), (2.25) не является регулярной в $U_0^{(r)}$, но (3.3) показывает, что она регулярна в $U_\alpha^{(r)}$ при $\forall \alpha > 0$. Этот пример показывает, что условия предложения 2.2, достаточные для того, чтобы задача (1.1), (2.2) была регулярной в $U_0^{(r)}$, близки к необходимым (в частности, условие (1.8')).

2) Аналогично, для уравнений (1.18) и (1.39) задача Коши с условиями (2.22) регулярна в $U_\alpha^{(r)}$ при $\alpha > 0$, а для (1.19)— при $\alpha > -K$.

3) Уравнения (1.16) и (1.17) в классе $U_\alpha^{(r)}$ при $\alpha < 0$ имеют только одно решение $u = 0$. Поэтому для них является регулярной задача в $U_\alpha^{(r)}$ при $\alpha < 0$ без краевых условий. То же верно для уравнений (1.18) и (1.19) при $\alpha < -K$. Уравнение (1.18) не является α-регулярным при $\alpha \in]-K, 0[$, поэтому при этих α для него нет регулярных в $U_\alpha^{(r)}$ краевых задач; аналогично обстоит дело в уравнением (1.39) при $\alpha < 0$.

4) Для эллиптического уравнения (1.27) все краевые задачи (2.27)—(2.30) регулярны в $U_\alpha^{(r)}$ при $\alpha \in [-\sqrt{q}, \sqrt{q}]$. При $\alpha \notin [-\sqrt{q}, \sqrt{q}]$ для уравнения (1.27) нет регулярных в $U_\alpha^{(r)}$ краевых задач, поскольку оно при этих α не является α-регулярным; то же верно для уравнения Лапласа при $\alpha \neq 0$ и для уравнений Гельмгольца (1.28) и Коши—Римана (1.29) при всех $\alpha \in \mathbb{R}$.

5) Для параболического уравнения (1.32) задача Коши (2.33) регулярна в $U_\alpha^{(r)}$ при $\alpha \geqslant -q$; а при $\alpha < -q$ для него нет регулярных в $U_\alpha^{(r)}$ краевых задач.

Замечание 3.1. Из рассмотренных примеров видно, что число l краевых условий в регулярных в U_α^r задачах для фиксированного уравнения слабо зависит от α. Например, для рассмотренных гиперболических уравнений $l=0$ или $i=2$, для эллиптических, параболических и Шрёдингера — только $l=1$, для (1.39) — только $l=2$. Это связано с условием (2.6) и тем, что уравнение является α-регулярным как правило лишь для одного (или двух) значений $\alpha \in \mathbb{R}$, если такие α вообще имеются.

Например, для уравнений Гельмгольца (1.28) и Коши—Римана (1.29) таких значений α вообще нет, и соответственно, регулярных в $U_\alpha^{(r)}$ краевых задач вида (2.2) для них также нет.

С другой стороны, например, уравнение (ср. (1.19))

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + K_1 \right)^2 - a^2 \Delta \right) \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + K_2 \right)^2 - a^2 \Delta \right) u(x, t) = 0,$$
$$x \in \mathbb{R}^k, \quad t > 0, \tag{3.4}$$

при $K_2 < K_1$ имеет корни

$$\lambda_{1,2} = -K_1 \pm ia|\xi|, \quad \lambda_{3,4} = -K_2 \pm ia|\xi|; \quad \xi \in \mathrm{R}^k.$$

Поэтому для его решения $u \in U^{(r)}$

$$\tilde{u}(\xi, t) = e^{-K_1 t}(C_1(\xi) e^{ia|\xi|t} + C_2(\xi) e^{-ia|\xi|t}) +$$
$$+ e^{-K_2 t}(C_3(\xi) e^{ia|\xi|t} + C_4(\xi) e^{-ia|\xi|t}),$$

и для уравнения (3.4)

$$\nu_\alpha(\xi) = \begin{cases} 0, & \alpha < -K_1, \\ 2, & -K_1 \leqslant \alpha < -K_2, \\ 4, & \alpha \geqslant -K_2. \end{cases}$$

Поэтому для (3.4) регулярная в $U_\alpha^{(r)}$ задача должна при $\alpha \geqslant -K_2$ содержать 4 начальных условия (например, задача Коши), при $\alpha \in [-K_1, -K_2]$ — два условия; при $\alpha < -K_1$ не нужно задавать никаких краевых условий.

3.2. Задача Коши. Чтобы задача Коши для общего уравнения (1.1) (см. определение 2.2) была регулярной в $U_\alpha^{(r)}$, необходимо, согласно (3.1), выполнение условия

$$(\nu_\alpha(\xi') = \nu, \ \xi' \in \mathrm{R}^{n-1}) \Leftrightarrow \bar{\alpha}_\nu \leqslant \alpha. \tag{3.5}$$

Это означает, в частности, что уравнение (1.1) должно быть корректным по Петровскому.

Предложение 3.2. Пусть уравнение (1.1) корректно по Петровскому и (см. (1.6))

$$p_{(\nu)}(\xi') \equiv \mathrm{const} \neq 0. \tag{3.5$'$}$$

Тогда задача Коши для уравнения (1.1) регулярна в $U_\alpha^{(r)}$ при $\alpha > \bar{\alpha}_\nu$ (даже если не выполнено условие (1.8)).

Доказательство. При условии (3.5) задачу Коши для уравнения (1.1) можно записать в виде системы (где $t \equiv x_n$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial t} = u_1(t, x'), \quad t > 0, \quad x' \in \mathrm{R}^{n-1}, \\ \vdots \\ \dfrac{\partial u_{\nu-2}}{\partial t} = u_{\nu-1}(t, x'), \\ \dfrac{\partial u_{\nu-1}}{\partial t} = -\dfrac{1}{p^\nu} \displaystyle\sum_{j=0}^{\nu-1} p_{(j)}(i\partial_{x'}) u_j; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0(x', 0+) = f_1(x'), \\ \vdots \\ u_{\nu-1}(x', 0+) = f_\nu(x'). \end{cases} \tag{3.6}$$

В векторном виде эта задача записывается так:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=Q(\partial_{x'})U(x',t),\quad t>0,\quad x'\in\mathbf{R}^{n-1};$$

$$U|_{t=0+}=F\equiv\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_\nu\end{pmatrix};\quad U\equiv\begin{pmatrix}u_0\\ \vdots\\ u_\nu\end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Или, после касательного преобразования Фурье,

$$\frac{\partial\tilde U}{\partial t}=Q(-i\xi')\tilde U(\xi',t),\quad t>0;\quad \tilde U(\xi',0+)=\tilde F(\xi'),$$

$$\text{п. в. } \xi'\in\mathbf{R}^{n-1}. \tag{3.8}$$

Отсюда

$$\tilde U(\xi',t)=e^{Q(-i\xi')t}\tilde F(\xi'),\quad \text{п. в. } \xi'\in\mathbf{R}^{n-1},\quad t\geqslant 0. \tag{3.9}$$

Заметим теперь, что

$$\det(Q(-i\xi')-\lambda E)=P(-i\xi',\lambda), \tag{3.10}$$

так что собственные числа матрицы $Q(-i\xi')$ равны $\lambda_k(\xi')$, $k=1,\ldots,\nu$. Поэтому, в силу оценки из [20], [37],

$$\|e^{Q(-i\xi')t}\|\leqslant Ce^{\bar\alpha_\nu t}(1+t\,\|Q(-i\xi')\|)^{\nu-1}\quad\text{при}\quad t>0,\ \xi'\in\mathbf{C}^{n-1}. \tag{3.11}$$

Отсюда следует, что $\forall l=0,1,2,\ldots$

$$\|\partial_t^l e^{Q(-i\xi')t}\|\leqslant Ce^{\bar\alpha_\nu t}(1+|\xi'|)^{M_l}(1+t)^{\nu-1},\ t>0,\ \xi'\in\mathbf{C}^{n-1}. \tag{3.12}$$

Поэтому, аналогично (3.3), при $\alpha>\bar\alpha_\nu$ для $\forall s\in\mathbf{R}$

$$|||\partial_t^l U(\cdot,t)|||_s\leqslant C_\alpha e^{\alpha t}\sum_{j=1}^{\nu}\|f_j\|_{s+M_l},\quad t>0, \tag{3.13}$$

где $|||\cdot|||_s$ — норма в $[H_s(\mathbf{R}^{n-1})]^\nu$.

Например, для уравнения (1.39) задача Коши (2.25) регулярна в $U_\alpha^{(r)}$ при $\alpha>0$.

Следствие 3.1. Задача Коши является регулярной в $U_\alpha^{(r)}$ при $\alpha>\bar\alpha_\nu$ для уравнений (1.1), гиперболических по Гордингу или параболических по Петровскому. Действительно, для таких уравнений условие (3.5) выполнено, и (3.5′) — также.

3.3. Задача Дирихле для эллиптических уравнений. Пусть $P(\partial_x)$ — эллиптический оператор в $\mathbf{R}^n$ порядка $m=2l$, где l — целое число (это всегда верно при $n\geqslant 3$, согласно предложению 5.1 главы 3).

Определение 3.1. *Задачей Дирихле для оператора* $P(\partial_x)$ называется краевая задача с условиями вида (2.9), где $l=\frac{m}{2}$.

Предложение 3.3. 1) Если $\overline{\alpha}_l \leqslant \underline{\alpha}_{l+1}$ и выполнено условие (1.8′), то для оператора P задача Дирихле регулярна в $U_\alpha^{(r)}$ при $\alpha \in [\overline{\alpha}_l, \underline{\alpha}_{l+1}]$.

2) Если $\overline{\alpha}_l > \underline{\alpha}_{l+1}$, то для оператора $P(\partial_x)$ нет регулярных в $U_\alpha^{(r)}$ краевых задач.

Доказательство. Утверждение 1) вытекает из предложения 1.5 (2.10) в силу п. 2) предложения 3.1. Утверждение 2) следует также из предложения 1.5 в силу п. 1) предложения 3.1.

§ 4. Регулярные краевые задачи в классе функций произвольного роста

4.1. Рассмотрим краевую задачу (1.1), (2.2) в пространстве функций $u \in U^{(r)}$, $r \geqslant \overline{m}$.

Определение 4.1. Краевая задача (1.1), (2.2) называется *регулярной в классе* $U^{(r)}$, $r \geqslant \overline{m}$, если при всех $f_j \in H_{-\infty}(\mathbf{R}^{n-1})$ она имеет решение $u \in U^{(r)}$ и притом единственное.

Найдем необходимые условия на операторы P, $B_1, \ldots, B_l$, при которых задача (1.1), (2.2) регулярна в $U^{(r)}$. Функция u из (1.9) при любых $C_k(\xi') \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ принадлежит $U^{(r)}$ и является решением задачи (1.1), (2.2. Отсюда вытекает

Предложение 4.1. Для регулярности задачи (1.1), (2.2) в $U^{(r)}$

1) необходимо, чтобы $l=\nu$ и выполнялось условие (2.6′);

2) достаточно, чтобы оператор P был корректным по Петровскому, $l=\nu$ и выполнялось условие (2.6″);

3) при условии (1.8′) и $r \geqslant \nu - 1$ необходимо и достаточно, чтобы оператор P был корректным по Петровскому, $l=\nu$ и выполнялось условие (2.6″).

Доказательство. Утверждения 1) и 2) доказываются дословно как предложения 2.1 и 2.2 соответственно. Необходимость корректности по Петровскому оператора P в утверждении 3) выводится методом из доказательства предложения 2.3. А именно, если задача (1.1), (2.2) регулярна в $U^{(r)}$, $r \geqslant \nu$, то из (1.8′), как и в доказательстве предложения 2.3, выводится, что функции $C_k(\xi')$ в (1.9) могут быть произвольными элементами из $\tilde{H}_{-\infty}$. Возьмем $C_j(\xi') \equiv 0$ для $j \neq k$, тогда из (1.9) получаем, что $\forall k$

$$\tilde{u}(\xi', x_n) = C_k(\xi') e^{\lambda_k(\xi')x_n} \in H_{-\infty} \text{ при } \forall C_k(\xi') \in \tilde{H}_{-\infty} \ \forall x_n > 0. \quad (4.1)$$

Но это возможно лишь, если $\operatorname{Re} \lambda_k(\xi')$ ограниченная функция при $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$. Действительно, по упоминавшейся в § 2 теореме А.2.5 из [55], при некоторых C и $a_k \in \mathbf{R}$

$$\max_{|\xi'|=\rho} \operatorname{Re} \lambda_k(\xi') \sim C\rho^{a_k} \quad \text{при} \quad \rho \to \infty. \tag{4.2}$$

Если $a_k > 0$, то (4.1) не может выполняться. Следовательно, $a_k \leqslant 0$, так что все корни $\lambda_k(\xi')$ корректны по Петровскому. Необходимость условия (2.6″) выводится так же как в доказательстве предложения 2.3.

Замечание 4.1. Если в (4.2) $a_k > 0$ и $C_k(\xi') \in \tilde{H}_{-\infty}$, то при $x_n > 0$ функция $\tilde{u}(\cdot, x_n)$ будет принадлежать пространству $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, но, вообще говоря, не будет принадлежать $S'(\mathbf{R}^{n-1})$. Соответственно, $u(\cdot, x_n)$ при $x_n > 0$ принадлежит $Z'(\mathbf{C}^{n-1})$, но, вообще говоря, не принадлежит $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^{n-1})$.

Следствие 4.1. Для эллиптических уравнений при $n \geqslant 3$ нет регулярных в $U^{(r)}$ краевых задач, поскольку они не являются корректными по Петровскому.

Пример Адамара. Задача Коши (2.25) с $t \equiv x_n$ для уравнения Лапласа (1.26) не регулярна в $U^{(r)}$. Действительно, для общего решения $u \in U^{(r)}$ уравнения согласно (1.9),

$$\tilde{u}(\xi', x_n) = C_1(\xi') e^{-|\xi'|x_n} + C_2(\xi') e^{|\xi'|x_n} = \\ = A(\xi') \operatorname{ch} |\xi'| x_n + B(\xi') \operatorname{sh} |\xi'| x_n. \tag{4.3}$$

Подставляя в (2.25), находим $A(\xi') = \tilde{u}_0(\xi')$ и $B(\xi') = \tilde{u}_1(\xi')/|\xi'|$, откуда

$$\tilde{u}(\xi', x_n) = \tilde{u}_0(\xi') \operatorname{ch} |\xi'| x_n + \tilde{u}_1(\xi') \frac{\operatorname{sh} |\xi'| x_n}{|\xi'|}. \tag{4.4}$$

Если взять $\tilde{u}_1(\xi') \equiv 0$, то $\tilde{u}(\cdot, x_n) \notin \tilde{H}_{-\infty}(\mathbf{R}^{n-1})$ при $x_n > 0$, например, для $\tilde{u}_0(\xi') \equiv 1$ или $\tilde{u}_0(\xi') \equiv (1 + |\xi'|^2)^{-N}$ при любом $N > 0$. Соответственно задача Коши (2.25) для уравнения Лапласа при $u_1(x') \equiv 0$ не имеет решения $u \in U^{(r)}$ для $u_0(x') = \delta(x')$ или $u_0(x') = F^{-1}_{\xi' \to x'}(1 + |\xi'|^2)^{-N}$.

Отметим, что последняя функция $u_0(x')$ имеет $2N-n$ непрерывных производных при $2N-n > 0$ и убывает быстрее любой степени $|x'|$ при $|x'| \to \infty$.

Замечание 4.2. Если задача Коши для оператора P регулярна в $U_\alpha^{(r)}$, $r \geqslant \nu - 1$, при некотором $\alpha \in \mathbf{R}$, то из (3.1) вытекает (3.5). Тогда и в $U^{(r)}$ эта задача Коши также регулярна. В частности, задача Коши для оператора P регулярна в $U^{(r)}$, $r \geqslant \nu - 1$, при условиях предложения 3.2 (например, для гиперболических по Гордингу или параболических по Петровскому операторов P (см. следствие 3.1)).

Таким образом, рассмотрение пространства решений $U^{(r)}$ вместо $U_\alpha^{(r)}$ не приводит к новым примерам регулярных краевых задач.

§ 5. Корректные и непрерывные краевые задачи в полупространстве

5.1. Корректные краевые задачи. Пусть имеются некоторые нормированные пространства $H\subset U^{(r)}$, $r\geqslant \bar{m}$ и $H^j\subset H_{-\infty}(\mathbf{R}^{n-1})$ при $j=1,\ldots,l$. Обозначим $\mathcal{H}=H^1\oplus\ldots\oplus H^l$.

Определение 5.1. Краевая задача (1.1), (2.2) называется *корректной* в пространствах $H, H^1,\ldots,H^l$, если

1) при всех $f_j\in H^j$ она имеет единственное решение $u\equiv\equiv\mathcal{R}(f_1,\ldots,f_l)\in H$.

2) Отображение $\mathcal{R}:\mathcal{H}\to H$ непрерывно, т. е.

$$\|u\|_H\leqslant C\sum_{j=1}^{l}\|f_j\|_{H^j}. \tag{5.1}$$

Введем нормированное пространство

$$C_\alpha(0,\infty;H_s)\equiv\{u\in C(0,\infty;H_s):\|u\|_{s,\alpha}\equiv$$
$$\equiv\sup_{x_n>0}e^{-\alpha x_n}\|u(\cdot,x_n)\|_s<\infty\};\quad H_s\equiv H_s(\mathbf{R}^{n-1}). \tag{5.2}$$

Предложение 5.1. Все рассмотренные в §§ 2, 3 краевые задачи, регулярные в $U_\alpha^{(r)}$, являются корректными в пространствах $H\equiv C_\alpha(0,\infty;H_s)$ и $H^j=H_{s_j}\equiv H_{s_j}(\mathbf{R}^{n-1})$ для любых $s_j\in\mathbf{R}$ при $s\leqslant s_j$.

Доказательство. Для рассмотренных в §§ 2, 3 краевых задач, регулярных в $U_\alpha^{(r)}$, справедлива следующая оценка: для любых $s_j\in\mathbf{R}$ при $s\leqslant s_j$

$$\|u\|_{s,\alpha}\leqslant C\sum_j\|u_j\|_{s_j}. \tag{5.1'}$$

Например, для $\alpha=0$ такая оценка получается рассуждениями (2.15)—(2.21) (при $j=0$). Для $\alpha\neq 0$ оценки вида (5.1′) доказываются точно так же. Например, для задачи Коши при условиях предложения 3.2 оценка вида (5.1′) получена в (3.13).

Оценка (5.2) означает ограниченность оператора $\mathcal{R}$. Поскольку $\mathcal{R}$ — линейный оператор, то он также и непрерывен.

5.2. Непрерывные корректные краевые задачи. Обозначим через $\mathfrak{A}:U^{(r)}\to[H_{-\infty}(\mathbf{R}^{n-1})]^l$ оператор, соответствующий краевой задаче (1.1), (2.2):

$$\mathfrak{A}u=(\gamma B_1u,\ldots,\gamma B_lu),\quad u\in U^{(r)},\quad r\geqslant\bar{m};\quad (\gamma u)(x')\equiv u(x',0+),$$
$$u\in U^{(0)}. \tag{5.3}$$

Особый интерес представляют краевые задачи, которые корректны в некоторых пространствах $H, H^1,\ldots,H^l$ и для которых оператор $\mathfrak{A}:H\to\mathcal{H}\equiv H^1\oplus\ldots\oplus H^l$ непрерывен. Дело в том, что оператор $\mathcal{R}:\mathcal{H}\to H$ является правым обратным к оператору $\mathfrak{A}$, и он непрерывен, ввиду корректности краевой задачи. Поэтому оператор $\mathfrak{A}+\delta$ также имеет непрерывный правый обратный $\mathcal{B}_\delta:\mathcal{H}\to H$, если оператор $\mathfrak{A}$ непрерывен, а $\delta: H\to\mathcal{H}$, имеет достаточно малую норму. Грубо говоря, краевая задача остается корректной при малых возмущениях операторов P, B_j в рассматриваемых функциональных пространствах. Это позволяет строить теорию краевых задач для дифференциальных операторов с переменными мало меняющимися коэффициентами, а затем и с более общими (C^∞ и т. п.). На этом основан метод замораживания коэффициентов [2], [11].

Укажем условия корректности краевых задач (1.1), (2.2), непрерывных в пространствах

$$\begin{cases} H\equiv H^{(r)}_{\alpha,s}\equiv\{u\in U^{(r)}:\|u\|^{(r)}_{\alpha,s}\equiv\sup\limits_{\substack{x_n>0\\ i<r}} e^{-\alpha x_n}\|\partial^i_{x_n}u(\cdot,x_n)\|_{s-i\mu}<\infty\},\\ H^j\equiv H_{s-\mu_j}(\mathbb{R}^{n-1}),\ j=1,\dots,l. \end{cases} \tag{5.4}$$

Непрерывность оператора $\mathfrak{R}: H\to\mathcal{H}$ при $\forall s\in\mathbb{R}$ в таких пространствах вытекает из теоремы 3.1 главы 2, если $\mu=1$, $\mu_j=$ $=m_j$ $r\geqslant\overline{m}$.

Обозначим через $\lambda_k{}^0$ корни характеристического уравнения (1.6), соответствующие старшей части $P_m(\partial_x)$ оператора $P(\partial_x)$, и через

$$B_j^0(\partial_x)=\sum_{|\alpha|=m_j} b_{j\alpha}\partial_x^\alpha \tag{5.5}$$

— старшую часть оператора $B_j(\partial_x)$.

П р е д л о ж е н и е 5.2. Пусть граница $x_n=0$ не является характеристической для оператора P и для краевой задачи (1.1), (2.2) выполняются условия (3.1), (2.6″) и *условие Шапиро—Лопатинского* [27]

$$\det B_j^0(-i\xi',\lambda_k^0(\xi'))^l_{j,k=1}\neq 0 \text{ при } |\xi'|=1,\ \xi'\in\mathbb{R}^{n-1}. \tag{5.6}$$

Тогда краевая задача (1.1), (2.2) корректна в пространствах (5.4) при $\mu=1$, $\mu_j=m_j$, $r\geqslant\overline{m}$ и $\forall s\in\mathbb{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из нехарактеристичности границы $x_n=0$, по лемме 1.1, получаем, что

$$B_j(-i\xi',\lambda_k(\xi'))=B_j^0(-i\xi',\lambda_k^0(\xi'))+o(|\xi'|^{m_j}) \text{ при } |\xi'|\to\infty. \tag{5.7}$$

Отсюда, ввиду (1.15′) и в силу (5.6), вытекает, что

$$\det B_{jk}(\xi')|\sim|\det B_j^0(-i\xi',\lambda_k^0(\xi'))|\sim|\xi'|^{m_1+\dots+m_l},\ |\xi'|\to\infty. \tag{5.8}$$

Следовательно, ввиду (2.6″), для элементов обратной матрицы $B^{-1}(\xi')$ справедлива асимптотика

$$|B_{kj}^{-1}(\xi')|\sim(1+|\xi'|)^{-m_j},\quad |\xi'|\to\infty. \tag{5.9}$$

Поэтому из (2.8) следует, что

$$|C_k(\xi')|\leqslant C\sum_{j=1}^{l}(1+|\xi'|)^{-m_j}|\tilde{f}_j(\xi')|. \tag{5.10}$$

Но из (1.12′) вытекает оценка

$$|\tilde{u}(\xi', x_n)|\leqslant C\sum_{k=1}^{l}|C_k(\xi')|\,e^{\alpha x_n}, \tag{5.11}$$

поэтому из (5.10) получаем, что

$$\sup_{x_n>0} e^{-\alpha x_n}\|u(\cdot, x_n)\|_s\leqslant C\sum_{j=1}^{l}\|f_j\|_{s-m_j}. \tag{5.11′}$$

Аналогично, из (1.12′) вытекает оценка

$$|\partial^i_{x_n}\tilde{u}(\xi', x_n)|\leqslant C\sum_{k=1}^{l}|\lambda^i_k(\xi')|\cdot|C_k(\xi')|\,e^{\alpha x_n}. \tag{5.12}$$

Поэтому из (5.10) получаем, ввиду (1.21) и (1.15′), что

$$\sup_{x_n>0} e^{-\alpha x_n}\|\partial^i_{x_n}u(\cdot, x_n)\|_{s-i}\leqslant C\sum_{j=1}^{l}\|f_j\|_{s-m_j}. \tag{5.13}$$

Это предложение допускает обобщение также на параболические по Петровскому операторы P. А именно, если оператор P является β-параболическим по Петровскому, то модифицируем (5.5). Предполагая, что $b_{j\alpha}=0$ при $|\alpha'|+\beta\alpha_n>\beta\nu^j$, положим

$$B^0_j(\partial_x)\equiv\sum_{|\alpha'|+\beta\alpha_n=\beta\nu^j} b_{j\alpha}\partial^\alpha_x. \tag{5.14}$$

Тогда из теоремы 3.1 главы 2 вытекает непрерывность оператора $\mathfrak{A}$ в пространствах (5.4), в которых нужно взять $\mu=\beta$ и $\mu_j\beta\nu^j$, $r\geqslant\bar{\nu}=\max\nu^j$.

Предложение 5.2′. Пусть оператор P является β-параболическим по Петровскому, и выполняются условия (2.6″) и (5.6), где $\lambda_k{}^0(\xi')$ — корни уравнения (1.34). Тогда краевая задача (1.1), (2.2) корректна в пространствах (5.4) при $r\geqslant\bar{\nu}$ и $\forall s\in\mathbf{R}$, $\mu=\beta$, $\mu_j=\beta\nu_j$.

Доказательство этого предложения почти совпадает с доказательством предыдущего. Нужно лишь вместо (1.15′) и (1.21) использовать (1.36) и (1.37′) соответственно.

Следствие 5.1. Пусть выполнено условие (1.8′) и аналогично, пусть

$$\lambda^0_k(\xi')\neq\lambda^0_j(\xi')\ \text{при}\ k\neq j,\quad |\xi'|=1,\quad \xi'\in\mathbf{R}^{n-1}. \tag{5.15}$$

Тогда задача Коши для гиперболического (или β-параболического) по Петровскому оператора $P(\partial_x)$ является корректной в пространствах (5.4) при $r\geqslant m-1$, $\mu=1$, $\mu_j=j-1$ (или $\mu=\beta$, $\mu_j=\beta(j-1)$). Действительно, условия (2.6″) и (5.6) выполняются, ввиду (2.10).

Аналогично, при условиях (1.8′), (5.15) для эллиптического оператора $P(\partial_x)$ задача Дирихле (определение 3.1) является корректной в пространствах (5.4) при $n\geqslant 3$ и $r\geqslant \frac{m}{2}-1$, $\mu=1$, $\mu_j=j-1$, если $\overline{\alpha}_l\leqslant\alpha_{l+1}$ и $\overline{\alpha}\in[\alpha_l, \alpha_{l+1}]$. Исследованию корректности краевых задач в самых разнообразных пространствах посвящена обширная литература. В [20] имеется подробное изложение результатов по регулярности и корректности задачи Коши для общих дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в классах функций растущих как $e^{a|x|^b}$ при различных a и b. В [20] указаны точные границы показателей роста a и b решения $u(x)$ и начальных данных, при которых задача Коши регулярна и корректна.

Основополагающие результаты по корректности задачи Коши в пространствах типа L_2 были получены в [32], [60].

§ 6. Ядро Пуассона краевой задачи в полупространстве

6.1. Ядро Пуассона и фундаментальное решение краевой задачи.

Определение 6.1. *Фундаментальным решением краевой задачи* (1.1), (2.2) называется векторная функция $E(x)=$ $=(E_k(x))_{k=1,\ldots,l}$, где $E_k\in U^{(r)}$ — решения краевых задач в $\mathbf{R}^n_+$

$$\begin{cases} P(\partial_x)E_k(x)=0, & x_n>0,\ x'\equiv(x_1,\ldots,x_{n-1})\in\mathbf{R}^{n-1},\\ \gamma B_jE_k(x)=\delta_{jk}\delta(x'), & j=1,\ldots,l,\end{cases}\tag{6.1}$$

где δ_{jk} — δ-символ Кронекера, а $\delta(x')=\delta_{n-1}(x')$ — δ-функция в $\mathbf{R}^{n-1}$.

Если краевая задача (1.1), (2.2) регулярна в $U_\alpha^{(r)}$, $r\geqslant\overline{m}$, при некотором α, то для каждого $k=1,\ldots,l$ такая функция $E_k\in U_\alpha^{(r)}$ существует $\left(\text{поскольку } \delta(x')\in H_s(\mathbf{R}^{n-1}) \text{ при } s<-\frac{n-1}{2}\right)$ и единственна.

Определение 6.2. *Ядром Пуассона краевой задачи* (1.1), (2.2) называется векторная функция

$$\mathcal{P}(x;y')=E(x'-y';x_n),\ x_n>0,\ x',y'\in\mathbf{R}^{n-1}.\tag{6.2}$$

Отметим, что $\mathcal{P}(x;y')\in U_\alpha^{(r)}\subset\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n_+)$ при $\forall y'\in\mathbf{R}^{n-1}$. Из (6.1) следует, что $\mathcal{P}_k(x,y')\equiv E_k(x'-y';x_n)$ при $\forall y'\in\mathbf{R}^{n-1}$ есть решение краевой задачи

$$\begin{cases} P(\partial_x)\mathcal{P}_k(x,y')=0, & x_n>0,\\ \gamma B_j(\partial_x)\mathcal{P}_k(x,y')=\delta_{jk}\delta(x'-y'), & j=1,\ldots,l,\end{cases}\tag{6.3}$$

где y' играет роль параметра.

Предложение 6.1. Пусть краевая задача (1.1), (2.2) регулярна в $U_\alpha^{(r)}$, $r\geqslant\max m,\overline{m})$. Тогда ее решение u при произвольных граничных данных $f_j(x')\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ выражается по формуле (здесь $F=(f_1,\ldots,f_l)$)·

$$u(x', x_n)=E(\cdot, x_n)*F\equiv\sum_k E_k(\cdot, x_n)*f_k(\cdot)=$$
$$=\sum_k \langle E_k(x'-y'; x_n),\ f_k(y')\rangle. \quad (6.4)$$

Доказательство. Для функции (6.4) при $\alpha_n\leqslant m$
$$\partial_{x_n}^{\alpha_n}u(x', x_n)=\sum_k \langle \partial_{x_n}^{\alpha_n}E_k(x'-y', x_n),\ f_k(y')\rangle=$$
$$=\sum_k \left(\partial_{x_n}^{\alpha_n}E_k(\cdot, x_n)*f_k(\cdot)\right)(x'), \quad (6.5)$$
поскольку $E_k\in C^{(r)}(0, \infty; H_s)$ при некотором $s\in\mathbf{R}$, $r\geqslant m$. Поэтому из свойства (1.47) главы 1 свертки и (6.1) получаем, что
$$P(\partial_x)u(x', x_n)=\sum_k ((PE_k)(\cdot, x_n)*f_k(\cdot))(x')=0 \text{ при } x_n>0. \quad (6.6)$$
Аналогично,
$$\gamma B_j u(x')=\sum_k \gamma B_j E_k*f_k=\delta_{n-1}*f_j=f_j. \quad (6.7)$$

Отметим, что через ядро Пуассона (6.2) формула (6.4) для решения краевой задачи записывается так:
$$u(x', x_n)=\langle \mathscr{P}(x; y'), F(y')\rangle\equiv\sum_k \langle \mathscr{P}_k(x, y'), f_k(y')\rangle. \quad (6.8)$$

6.2. Связь фундаментального решения задачи Коши с запаздывающим фундаментальным решением оператора $P(\partial_x)$. Пусть для некоторого оператора $P(\partial_x)$ порядка ν по ∂_{x_n} задача Коши регулярна в $U^{(r)}$, $r\geqslant\nu-1$, и $p_{(\nu)}\equiv\mathrm{const}\neq0$ $p_{(j)}=0$ при $1\leqslant j\leqslant\nu-1$, в (1.6). Тогда эта задача Коши имеет фундаментальное решение $E(x)\in[C^{(\nu-1)}(0, \infty; H_s(\mathbf{R}^{n-1}))]^\nu$ при некотором $s\in\mathbf{R}$. Система (6.1) в этом случае имеет вид
$$\begin{cases} p_{(\nu)}\dfrac{\partial^\nu E_k}{\partial x_n^\nu}+p_{(0)}(i\partial_{x'})E_k=0, & x_n>0, \quad x'\in\mathbf{R}^{n-1},\\ \gamma\partial_{x_n}^{j-1}E_k=\delta_{jk}\delta(x'), & j=1, \dots, \nu. \end{cases} \quad (6.9)$$

Определим обобщенную функцию $\mathscr{E}(x)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ по формуле
$$\mathscr{E}(x', x_n)=\begin{cases}\dfrac{1}{p_{(\nu)}}E_\nu(x', x_n), & x_n>0,\\ 0, & x_n<0,\end{cases}$$
т. е.
$$\langle\mathscr{E}, \varphi\rangle\equiv\int_a^\infty\frac{1}{p_{(\nu)}}\langle E_\nu(\cdot, x_n), \varphi(\cdot, x_n)\rangle, \quad \forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n). \quad (6.10)$$

Тогда $\mathscr{E}(x)$ является *запаздывающим*, т. е. равным нулю при $x_n<0$, фундаментальным решением оператора P: $P(\partial_x)\mathscr{E}(x)=\delta(x)$. Это вытекает из (6.9), аналогично лемме 1.1 главы 1. Обратно, через функцию $\mathscr{E}(x)$ из (6.10) фундаментальное решение $E(x)$ выражается по формулам

$$E_k(x)=\partial_{x_n}^{\nu-k}E_\nu=p_{(\nu)}\partial_{x_n}^{\nu-k}\mathscr{E}(x),\quad x_n>0;\quad 1\leqslant k\leqslant\nu-1. \qquad (6.11)$$

Действительно, функция

$$\hat{E}_k(x', x_n)=\partial_{x_n}^{\nu-k}t_1,\quad 2\leqslant k\leqslant\nu, \qquad (6.12)$$

принадлежит классу $U^{(r)}$, $r\geqslant\nu-1$, и является решением задачи (6.9), как и E_k. Поэтому $\hat{E}_k=E_k$, в силу регулярности задачи Коши. Отсюда вытекает (6.11).

Итак, фундаментальное решение задачи (6.9) выражается формулами (6.11) через запаздывающие фундаментальное решение (6.10) оператора $P(\partial_x)$. Априори запаздывающее фундаментальное решение оператора $P(\partial_x)$ может быть неединственным. Поэтому возникает вопрос о методах выделения функции (6.10) из множества всех запаздывающих фундаментальных решений. Например, для гиперболических по Гордингу операторов функция (6.10) выделяется следующим образом.

П р е д л о ж е н и е 6.2. Для гиперболического по Гордингу оператора P запаздывающее фундаментальное решение (6.10) имеет носитель в некотором конусе $|x'|\leqslant Ax_n$ и такое фундаментальное решение единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (6.10), (6.9) и (3.9) вытекает, что

$$\tilde{\mathscr{E}}(\xi', x_n)=\frac{1}{p_{(\nu)}}\tilde{E}_\nu(\xi', x_n)=\frac{1}{p_{(\nu)}}e^{Q(-i\xi')x_n}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \qquad (6.13)$$

$$\xi'\in\mathbf{R}^{n-1},\quad x_n\geqslant 0;\quad \nu=m.$$

Поэтому $\tilde{\mathscr{E}}(\xi', x_n)$ при $\forall x_n>0$ — целая функция от $\xi'\in\mathbf{C}^{n-1}$. Кроме того, собственные числа матрицы $Q(-i\xi')$, ввиду (3.10), равны $\lambda_k(\xi')$. Наконец, в силу гиперболичности по Гордингу, из леммы 1.1 получаем, что

$$|\operatorname{Re}\lambda_k^0(\xi')|\sim|\operatorname{Re}\lambda_k(\xi')|\leqslant A(|\operatorname{Im}\xi'|+1)\ \text{при}\ \xi'\in\mathbf{C}^{n-1}.$$

Поэтому из (6.13), в силу оценки из [20], [37], получаем, аналогично (3.11), что при $x_n>0$

$$|\tilde{\mathscr{E}}(\xi', x_n)|\leqslant C\,\|e^{Q(-i\xi')x_n}\|\leqslant Ce^{A|\operatorname{Im}\xi'|x_n}(1+x_n\,\|Q(-i\xi')\|)^{\nu-1},$$
$$\xi'\in\mathbf{C}^{n-1}. \qquad (6.14)$$

Отсюда, по теореме 5.1 главы 2, $\operatorname{supp}\mathscr{E}(\cdot, x_n)\subset\{x'\in\mathbf{R}^{n-1}: |x'|\leqslant Ax_n\}\Rightarrow\operatorname{supp}\mathscr{E}\subset Q\equiv\{x\in\mathbf{R}^n: |x'|\leqslant Ax_n\}$. Остается доказать единственность фундаментального решения $\mathscr{E}$ с носителем в конусе Q. Но это очевидно: если $P\mathscr{E}_1=\delta(x)$, $x\in\mathbf{R}^n$, и $\operatorname{supp}\mathscr{E}_1\subset Q$, то

$$\mathscr{E}=(P\mathscr{E})*\mathscr{E}_1=\mathscr{E}*(P\mathscr{E}_1)=\mathscr{E}, \tag{6.15}$$

согласно формуле (1.47) главы 1, поскольку свертка $\mathscr{E}*\mathscr{E}_1$ определена.

Следствие 6.1. Для волнового уравнения (1.6) главы 1 в $\mathbf{R}^k$ фундаментальное решение $E_{(k)}$ задачи Коши (2.21), согласно (6.11), имеет вид

$$E_{(1)}(x,t)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\delta(at-|x|)\\ \frac{1}{2a}\theta(at-|x|)\end{pmatrix},\quad E_{(2)}(x,t)=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{E}_2^+(x,t)\\ \mathscr{E}_2^+(x,t)\end{pmatrix},$$

$$E_{(3)}(x,t)=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{E}_3^+(x,t)\\ \mathscr{E}_3^+(x,t)\end{pmatrix},$$

где $\mathscr{E}_2^+$ и $\mathscr{E}_3^+$ — функции из (1.6′) главы 1. Соответственно, решение (6.4) такой задачи Коши при $k=1$ выражается *формулой Даламбера*

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(u_0(x-at)+u_0(x+at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}u_1(y)\,dy$$

$$\forall u_0,\ u_1\in C_0^\infty(\mathbf{R}),$$

и аналогично при $k=2, 3$ — это, соответственно, *формулы Пуассона и Кирхгофа*

$$u(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\langle\mathscr{E}_k^+(x-y,t),u_0(y)\rangle+\langle\mathscr{E}_k^+(x-y,t),u_1(y)\rangle$$

$$\forall u_0,\ u_1\in C_0^\infty(\mathbf{R}^k).$$

Для параболических по Петровскому уравнений функция (6.10) выделяется следующим образом.

Предложение 6.3. ([39]). Для $2b$-параболического по Петровскому оператора $P(\partial_x)$ запаздывающее фундаментальное решение (6.10) является гладкой функцией при $x\neq0$, удовлетворяющей оценкам: $\forall\alpha$

$$|\partial_x^\alpha\mathscr{E}(x)|\leqslant C_\alpha x_n^{\nu-\alpha_0-1-\frac{n-1+|\alpha|}{2b}}e^{-\left(\frac{|x'|^{2b}}{x_n}\right)^{\frac{1}{2b-1}}},\quad x_n>0. \tag{6.16}$$

Такое фундаментальное решение единственно.

Оценки (6.16) доказаны в [39], а единственность доказывается как в (6.15).

Следствие 6.2. Для уравнения теплопроводности (1.31) фундаментальное решение задачи Коши совпадает с функцией (2.8′) главы 1 и решение задачи Коши имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^k} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} u_0(y)\, dy \quad \forall u_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k), \quad t > 0.$$

Для решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера (1.38) из (2.34) получается аналогичная формула:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi i t})^k} \int e^{\frac{i|x-y|^2}{4a^2 t}} \psi_0(y)\, dy,$$

т. е. фундаментальным решением задачи Коши для уравнения Шрёдингера является функция (2.9′) главы 1.

§ 7. Краевые задачи в полупространстве для неоднородных уравнений

7.1. Неоднородные уравнения в полупространстве. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$P(\partial_x)\, v(x) = f(x), \quad x_n > 0, \tag{7.1}$$

где $f \in U_\alpha^{(r-\nu)+}$ при некоторых α, r. Построим частное решение v этого уравнения в классе $U_\alpha^{(r)}$.

Предложение 7.1. Пусть $p_{(\nu)} \equiv \mathrm{const} \neq 0$ в (1.6) и $\bar{\alpha}_\mu < \alpha_{\mu+1}$ при некотором $\mu \leqslant \nu$. Тогда для $\alpha \in]\bar{\alpha}_\mu, \alpha_{\mu+1}[$ уравнение (7.1) при $f(x) \in U_\alpha^{(r-\nu)+}$ имеет решение $v \in U_\alpha^{(r)}$.

Доказательство. Функцию $f \in U_\alpha^{(r-\nu)_+}$ можно продолжить на $x_n < 0$ до функции $Lf(x) \in C^{(r-\nu)_+}(-\infty, \infty; H_s(\mathbb{R}^{n-1}))$ при некотором $s \in \mathbb{R}$ так, чтобы

$$Lf(\cdot, x_n) = f(\cdot, x_n) \text{ при } x_n > 0, \quad Lf(\cdot, x_n) = 0 \text{ при } x_n < -1,$$
$$\left\| \partial_{x_n}^j Lf(\cdot, x_n) \right\|_s \leqslant C e^{\alpha x_n}, \quad x_n \in \mathbb{R}, \quad j \leqslant (r-\nu)_+. \tag{7.2}$$

Для этого можно использовать *оператор продолжения Стейна* [11].

Построим $Lv \in C^{(r)}(0, \infty; H_s(\mathbb{R}^{n-1}))$, решение уравнения

$$P(\partial_x)\, Lv(x) = Lf(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{7.3}$$

для которого при некоторых $s_j \ll s$

$$\| \partial_{x_n}^j Lv(\cdot, x_n) \|_{s_j} \leqslant C e^{\alpha x_n}, \quad x_n > 0, \quad j \leqslant r. \tag{7.4}$$

Тогда $v \equiv Lv|_{x_n > 0} \in U_\alpha^{(r)}$ и является решением уравнения (7.1).

После касательного преобразования Фурье (7.3) переходит в

$$P(-i\xi', \partial_{x_n})\widetilde{Lv}(\xi', x_n)=\widetilde{Lf}(\xi', x_n),\quad x_n\in\mathbb{R} \text{ п. в. } \xi'\in\mathbb{R}^{n-1}. \quad (7.5)$$

При $\forall\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}$ оператор $P(-i\xi', \partial_{x_n})$ имеет символ

$$P(-i\xi', -i\xi_n)\neq 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im}\xi_n\in]\overline{\alpha}_\mu, \underline{\alpha}_{\mu+1}[. \quad (7.6)$$

Поэтому функция

$$\tilde{\mathscr{E}}(\xi', x_n)\equiv F^{-1}_{\xi_n\to x_n}\left(\frac{1}{P(-i\xi', -i\xi_n)}\bigg|_{\operatorname{Im}\xi_n=\alpha}\right) \quad (7.7)$$

при $\alpha\in]\overline{\alpha}_\mu, \underline{\alpha}_{\mu+1}[$ является фундаментальным решением оператора $P(-i\xi', \partial_{x_n})$. Из (7.6) следует, что $\forall\varepsilon>0$

$$|\tilde{\mathscr{E}}(\xi', x_n)|\leqslant\begin{cases}C_\varepsilon e^{(\underline{\alpha}_{\mu+1}-\varepsilon)x_n}, & x_n<0,\\ C_\varepsilon e^{(\overline{\alpha}_\mu+\varepsilon)x_n}, & x_n>0,\end{cases} \quad (7.8)$$

где C_ε не зависит от ξ'. Эти оценки вытекают из разложения

$$P(-i\xi)=p_{(\nu)}(-i\xi_n-\lambda_1(\xi'))\dots(-i\xi_n-\lambda_\nu(\xi')), \quad (7.9)$$

поскольку $p_{(\nu)}\neq 0$, $\operatorname{Re}\lambda_k(\xi')<\overline{\alpha}_\mu+\varepsilon$ при $k\leqslant\mu$ и $\operatorname{Re}\lambda_k(\xi')>$ $>\underline{\alpha}_{\mu+1}-\varepsilon$ при $k\geqslant\mu+1$. Пусть, для простоты, $\nu\geqslant 1$.

Определим функцию $\widetilde{Lv}(\xi', x_n)$ формулой

$$\widetilde{Lv}(\xi', x_n)=\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\mathscr{E}}(\xi', x_n-y_n)\widetilde{Lf}(\xi', y_n)\,dy_n=$$

$$=F^{-1}_{\xi_n\to x_n}\left(\frac{F_{x_n\to\xi_n}(\widetilde{Lf})}{P(-i\xi', -i\xi_n)}\bigg|_{\operatorname{Im}\xi_n=\alpha}\right). \quad (7.10)$$

Здесь интеграл понимается как интеграл по Бохнеру от функции параметра y_n со значениями в $\tilde{H}_s(\mathbb{R}^{n-1})$. Сходимость этого интеграла Бохнера следует из (7.8) и (7.2):

$$\|\widetilde{Lv}(\cdot, x_n)\|_{\tilde{H}_s}\leqslant\int_{-\infty}^{x_n}C_\varepsilon e^{(\overline{\alpha}_\mu+\varepsilon)(x_n-y_n)}e^{\alpha y_n}dy_n+$$

$$+\int_{x_n}^{+\infty}C_\varepsilon e^{(\underline{\alpha}_{\mu+1}-\varepsilon)(x_n-y_n)}e^{\alpha y_n}dy_n\leqslant C^1_\varepsilon e^{\alpha x_n}, \quad (7.11)$$

если $\alpha\in]\overline{\alpha}_\mu+\varepsilon, \underline{\alpha}_{\mu+1}-\varepsilon[$. Очевидно, функция

$$Lv(x', x_n)\equiv F^{-1}_{\xi'\to x'}\widetilde{Lv}(\xi', x_n)$$

удовлетворяет уравнению (7.3); оценки (7.4) для нее доказываются аналогично (7.11).

7.2. Краевые задачи для неоднородных уравнений. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} P(\partial_x)u(x)=f(x), \ x_n>0, \\ \gamma B_j(\partial_x)u(x')=f_j(x'), \ x'\in\mathrm{R}^{n-1}; \ j=1, \ldots, l. \end{cases} \tag{7.12}$$

Предложение 7.2. Пусть α и оператор P удовлетворяют условиям предложения 7.1 и краевая задача (1.1), (2.2) регулярна в $U_\alpha^{(r)}$, $r\geqslant\overline{m}$. Тогда краевая задача (7.12) при любых $f\in U_\alpha^{(r-\nu)+}$ и $f_j\in H_{-\infty}(\mathrm{R}^{n-1})$ имеет единственное решение $u\in U_\alpha^{(r)}$.

Доказательство. Пусть $u\in U_\alpha^{(r)}$ является решением задачи (7.1) и $v\in U_\alpha^{(r)}$ — решение уравнения (7.1), построенное в предложении 7.1. Тогда $w\equiv u-v\in U_\alpha^{(r)}$ и является решением задачи

$$\begin{cases} Pw=0, \ x_n>0 \\ \gamma B_j w=g_j\equiv f_j-\gamma B_j w, \ j=1, \ldots, l. \end{cases} \tag{7.13}$$

Решение $w\in U_\alpha^{(r)}$ этой задачи существует и единственно в силу регулярности задачи (1.1), (2.2) в $U_\alpha^{(r)}$.

Замечание 7.1. Условиям предложения 7.2 удовлетворяют

а) ввиду следствия 3.1, — задача Коши для гиперболического по Гордингу или параболического по Петровскому оператора P при $\alpha>\overline{\alpha}_\nu$ и $r\geqslant\nu-1$, и

б) ввиду предложения 3.3, — также задача Дирихле для эллиптического оператора $P(\partial_x)$ порядка $m=2l$ при $n\geqslant 3$, если $\overline{\alpha}_l<\alpha<\underline{\alpha}_{l+1}$, $r\geqslant l-1$.

Глава 6

РЕЗКИЕ И ДИФФУЗНЫЕ ФРОНТЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ[1]

Гиперболические уравнения образуют широкий класс линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Самый известный представитель этого класса — волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-k^2\sum\frac{\partial^2 u}{\partial z_i^2}=0,$$

описывающее распространение волн со скоростью k; по аналогии с ним решения произвольных гиперболических уравнений также называются волнами. Элементарная волна, возникающая из точечного мгновенного возмущения, имеет особенность на некотором конусе в пространстве-времени — так называемом

[1] Эта глава написана В. А. Васильевым.

волновом фронте — аналитична вне него и равна нулю вне его выпуклой оболочки. Например, фронт волнового уравнения задается условиями $k^2t^2=\Sigma z_i^2$, $t\geqslant 0$. Предмет настоящей главы — качественное поведение волны при приближении к ее фронту.

Уже в случае волновых уравнений видны различные возможности такого качественного поведения. Так, в нашем четырехмерном пространстве-времени (и в любом другом $2l$-мерном, $l\geqslant 2$) сигнал заметен лишь одно мгновение, когда он проходит мимо наблюдателя. Напротив, в нечетномерном случае сигнал

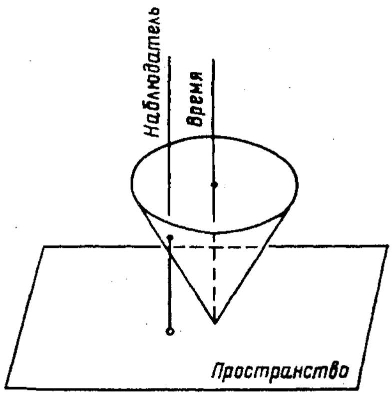


Рис. 1

продолжает звучать все время после момента встречи t_0 (с интенсивностью, пропорциональной $1/\sqrt{t^2-t_0^2}$). Первое обстоятельство позволяет нам общаться с помощью звука, второе обусловливает тот факт, что «акустический слой» в океане, являясь прекрасным проводником отдельных сигналов, непригоден для передачи сколько-нибудь сложной информации. Оба варианта поведения звуковых волн имеют аналоги для произвольных гиперболических уравнений: на языке общей теории говорят, что в первом случае внутренняя компонента дополнения к фронту является лакуной, а во втором имеется диффузия волн со стороны такой компоненты; внешняя компонента является лакуной для любых размерностей (и любых гиперболических уравнений).

§ 1. Основные понятия

1.1. Гиперболические операторы. Пусть дано линейное пространство $\mathbf{R}_x^n$ с координатами x_i, $i=1, \ldots, n$, и P — *дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами* на $\mathbf{R}_x^n$, то есть конечная сумма вида

$$\Sigma P_\alpha (v - i\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (v - i\partial/\partial x_n)^{\alpha_n},$$

где P_α — константы, занумерованные мультииндексами $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Такому оператору соответствует его *характеристический полином*

$$P = \Sigma P_\alpha \xi^\alpha, \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \xi_n^{\alpha_n},$$

от координат ξ_i некоторого n-мерного пространства $\mathbb{R}^n_\xi$. Это пространство $\mathbb{R}^n_\xi$ полезно рассматривать как пространство, двойственное к $\mathbb{R}^n_x$, причем спаривание между этими пространствами производится по формуле $\langle (\xi_1, \ldots, \xi_n), (x_1, \ldots, x_n) \rangle = \Sigma \xi_i x_i$. Порядок оператора P обозначается через $\deg P$.

Для оператора P можно поставить задачу Коши в полупространстве $x_1 \geqslant 0$. Выбор этого полупространства делает координату x_1 важнее остальных (в случае волнового уравнения x_1 — это время); соответственно, в двойственном пространстве $\mathbb{R}^n_\xi$ при этом выделяется орт $\vartheta = (1, 0, \ldots, 0)$.

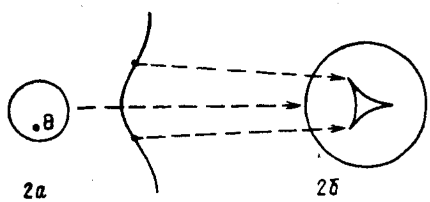
Пусть $\bar{P}$ — главная (старшей степени) однородная составляющая полинома P. Уравнение $\bar{P}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ выделяет в $\mathbb{C}^n_\xi$ коническую гиперповерхность $A = A(P)$; ее вещественная часть $A \cap \mathbb{R}^n_\xi$ называется *характеристическим конусом* для P и обозначается через $\operatorname{Re} A$.

Определение 1.1. Оператор P называется *гиперболическим по Петровскому* (или *строго гиперболическим*), если множество $\operatorname{Re} A$ неособо вне точки 0 и любая прямая в $\mathbb{R}_\xi^n$, параллельная орту ϑ и не проходящая через 0, пересекает $\operatorname{Re} A$ ровно в $\deg P$ различных точках.

Пример 1.1. 1) Волновой оператор.

2) Любой оператор в $\mathbb{R}^2$, при условии что $P(\vartheta) \neq 0$.

3) Невырожденная кубическая кривая в $\mathbb{RP}^2$ может иметь две или одну компоненту (и изображается либо обеими линиями на рис. 2 а, либо лишь правой из них). Соответствующий полином третьей степени в $\mathbb{R}_\xi^3$ во втором случае никогда не гиперболичен, а в первом гиперболичен в точности тогда, когда орт ϑ направлен внутрь конусообразной компоненты поверхности $\operatorname{Re} A$. Многочисленные другие примеры гиперболических полиномов см. в [40].



2а 2б

Рис. 2

В пространстве операторов данного порядка, действующих в $\mathbf{R}_x^n$, гиперболические по Петровскому операторы образуют открытую область.

Теорема 1.1 (см. [59]). *Для любых натуральных k, n, множество полиномов степени k в $\mathbf{R}_\xi^n$, гиперболических по Петровскому относительно фиксированной системы координат, состоит из двух связных компонент, каждая из которых стягиваема.*

1.2. Волновые фронты. Основной геометрический объект, участвующий в качественном описании решений гиперболического уравнения, — это его волновой фронт, который мы сейчас определим. Пусть ξ — произвольная точка конуса $\operatorname{Re} A$, $\xi \neq 0$. Касательную плоскость к $\operatorname{Re} A$ в этой точке будем рассматривать как подпространство в $\mathbf{R}_\xi^n$. Рассмотрим в исходном пространстве $\mathbf{R}_x^n$ множество всех векторов x, ортогональных этой плоскости и имеющих положительную первую координату x_1. Множество таких x для данной точки ξ образует луч в $\mathbf{R}_x^n$.

Определение 1.2. Объединение таких лучей по всем точкам $\xi \in \operatorname{Re} A \setminus \{0\}$ называется *волновым фронтом оператора P* и обозначается $W(P)$.

Волновой фронт может иметь особенности даже вдали от начала координат: они соответствуют точкам уплощения поверхности $\operatorname{Re} A$, то есть точкам, в которых форма кривизны $\operatorname{Re} A$ имеет ранг, меньший $n-2$. Например, проективизация волнового фронта, соответствующего кубической поверхности с рис. 2 а, изображена на рис. 2 б. При этом точки перегиба исходной кривой переходят в острия проективизации фронта (на рис. 2 а третья точка перегиба находится на бесконечности).

1.3. Теорема 1.2. (см. [40], [61]). *Если оператор P гиперболичен по Петровскому, то*

А) P обладает фундаментальным решением $E(P)$, носитель которого является конусом с вершиной в 0, принадлежащим полупространству $x_1 \geqslant 0$ и пересекающимся с плоскостью $x_1 = 0$ по единственной точке 0;

Б) такое фундаментальное решение $E(P)$ единственно;

В) решение $E(P)$ аналитично вне поверхности $W(P)$ и равно 0 вне выпуклой оболочки $W(P)$.

Замечание 1.1. Утверждение А теоремы 1.2 можно формализовать в виде определения (нестрого) гиперболического оператора: оператор P называется *гиперболическим*, если он обладает фундаментальным решением, носитель которого содержится в некотором конусе, таком как описано в утверждении А. Для общих гиперболических операторов также можно определить волновой фронт (см. [40]) и для них верны все утверждения теоремы 1.2. Такие операторы также имеют явную алгебраическую характеризацию (см. [40]), однако гиперболичность уже не определяется главной частью оператора: нужно знать и младшие члены. В пространстве всех операторов гиперболические, но не строго гиперболические составляют множество положительной коразмерности; оно лежит в замыкании множества строго гиперболических операторов.

1.4. Резкость, диффузия, лакуны. Пусть P — гиперболический оператор, W — его волновой фронт.

Определение 1.3. А. Имеется *голоморфная резкость* в точке y фронта W со стороны локальной (вблизи y) компоненты[1] l дополнения к W, если $E(P)$ продолжается с l до голоморфной функции в некоторой окрестности точки l. Аналогично, имеется *C^∞-резкость*, если $E(\mathbf{P})$ имеет C^∞-продолжение с компоненты l на ее замыкание l. В этих случаях компонента l называется *локальной* (*голоморфной или C^∞-*) *лакуной* оператора P вблизи y.

Б. Если со стороны l нет резкости, то говорят, что в l имеется *диффузия волн*.

В. Компонента L дополнения к фронту называется *голомоифной лакуной* (*C^∞-лакуной*), если с ее стороны имеется голоморфная (соответственно, C^∞-) резкость в любой точке ее замыкания (или, что эквивалентно, в единственной точке 0).

Г. Если в L $E(P)\equiv 0$, то L называется *сильной лакуной* (см. [40]) или просто *лакуной* (см. [61]).

Пример 1.2. Вновь рассмотрим волновой оператор

$$P_n=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-k^2\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial^2}{\partial z_i^2}.$$

Хорошо известно, что соответствующие фундаментальные решения $E(P_n)$ при $n=2$, 3, 4 задаются условиями $E(P_2)=\theta(kt-|z|)/2k$; $E(P_3)=\theta(kt-|z|)/2\pi k\sqrt{k^2t^2-|z|^2}$, $E(P_4)=\theta(t)\,\delta(k^2t^2-|z|^2)/2\pi h$, где θ — функция Хевисайда. Очевидно, внутренняя компонента дополнения к фронту в случае $n=4$ является сильной лакуной, в случае $n=2$ — голоморфной, но не сильной лакуной, а в случае $n=3$ имеется диффузия. Оказывается, что при росте n качественная ситуация будет такая же, как для $n=4$ при n четных, и как для $n=3$ — при n нечетных. Исключительность случая $n=2$ объясняется тем, что при этом n не превосходит порядка волнового оператора.

Для уравнения третьего порядка в $\mathbf{R}_x^3$, проективизация волнового фронта которого изображена на рис. 2б, самая внутренняя компонента является голоморфной, но не сильной

[1] Слово «компонента» всюду здесь означает «компонента линейной связности».

лакуной, а промежуточная компонента (в которую торчат «ребра» внутренней) диффузна вблизи любой точки своей границы.

§ 2. Критерий Петровского

И. Г. Петровский в работе [61] связал свойство компоненты L быть лакуной с некоторым топологическим условием, которое теперь называется *критерием Петровского.* Это условие состоит в тривиальности некоторого класса гомологий — *класса Петровского* — который мы сейчас определим. Всюду в этом параграфе P — строго гиперболический оператор в $\mathbf{R}_x^n$.

Пусть $x \in \mathbf{R}_x^n$ — произвольная точка исследуемой компоненты L дополнения к фронту W, $X \subset \mathbf{C}_\xi^n$ — ортогональная к x гиперплоскость. Пусть $\mathbf{CP}_\xi^{n-1}$ — множество всех комплексных одномерных подпространств в $\mathbf{C}_\xi^n$. Обозначим через X^* и A^* гиперповерхности в пространстве $\mathbf{CP}_\xi^{n-1}$, получающиеся при проективизации плоскости X и конуса A. *Цикл Петровского*, который мы строим, — это некоторый $(n-2)$-мерный цикл в множестве $X^* - A^*$. Опишем этот цикл.

Поскольку x не принадлежит фронту, то вблизи множества $\mathbf{RP}_\xi^{n-1}$ гиперповерхности X^* и A^* пересекаются трансверсально и их пересечение гладко. Множество $X^* \cap \mathrm{Re}\, A^*$ вещественных точек этого пересечения является $(n-3)$-мерным подмногообразием в $X^* \cap A^*$. Если n четно, то это многообразие ориентируемо. В [40] определен специальный выбор его ориентации, превращающий его в цикл; цикл Петровского $B(x) \subset X^* - A^*$ определяется как образ этого цикла при трубочном отображении. (Напомним конструкцию этого отображения. Рассмотрим трубчатую окрестность в X^* множества неособых точек многообразия $X^* \cap A^*$ и как-нибудь расслоим эту окрестность на двумерные диски, трансверсальные к множеству $X^* \cap A^*$. Тогда любому циклу ∇, лежащему в гладкой части множества $X^* \cap A^*$, можно сопоставить объединение границ тех дисков, которые пересекаются с $X^* \cap A^*$ по точкам множества ∇; комплексная ориентация множеств X^*, $X^* \cap A^*$ и исходная ориентация цикла ∇ позволяют ориентировать полученную трубку).

При нечетном n цикл $B(x)$ вдали от A^* совпадает с многообразием $\mathrm{Re}\, X^*$, взятым с кратностью 2, а вблизи множества A^* раздваивается на пару контуров, обтекающих A^* в X^* с двух сторон: невещественная часть этого цикла геометрически совпадает с описанной выше трубкой в $X^* - A^*$ вокруг многообразия $X^* \cap \mathrm{Re}\, A^*$, но две половины этой трубки, разделяемые множеством $\mathrm{Re}\, X^*$, имеют рассогласованные ориентации. В случае $n=3$ цикл $B(x)$ изображен на рис. 3, множество $A^* \cap X^*$ на нем обозначено крестиками.

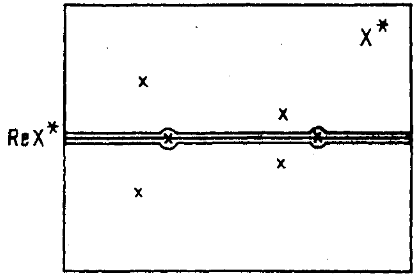


Рис. 3

Определение 2.1. Класс $\beta(x)$, определяемый циклом $B(x)$ в группе $H_{n-2}(X^*-A^*)$ гомологий пространства X^*-A^* с комплексными коэффициентами, называется *классом Петровского*, а условие $\beta(x)=0$ — *критерием Петровского*.

Легко видеть, что при $n=2$ критерий Петровского выполнен всегда, а при $n=3$ эквивалентен тому, что множество $X^*\cap A^*$ не имеет невещественных точек, см. рис. 3.

2.2. Теорема 2.1 (см. [16],]40], [61]). Если $\beta(x)=0$, то содержащая x компонента L дополнения к фронту является голоморфной лакуной для P и для всех операторов с той же главной частью $\bar{P}$ (а если вдобавок $\deg P<n$ и $P=\bar{P}$ — то и сильной лакуной). Если множество A^* гладко, то верно и обратное: если L — C^∞-лакуна, то $\beta(x)=0$ для любого $x\in L$.

Первое утверждение этой теоремы в случае однородного $P=\bar{P}$ вытекает из формулы Герглотца—Петровского—Лере: в точке $x\in L$ все частные производные $D^\nu E$ фундаментального решения $E=E(P)$ при $|\nu|>\deg P-n$ задаются интегралами некоторых дифференциальных $(n-1)$-форм $\Lambda(x, \nu, P)$, регулярных в области $\mathbf{CP}_\xi^{n-1}-X^*-A^*$, по циклу $t\beta(x)$, лежащему в этой области и получаемому из цикла $\beta(x)$ трубочной операцией $t: H_{n-2}(X^*-A^*)\to H_{n-1}(\mathbf{CP}_\xi^{n-1}-X^*-A^*)$. Следовательно, если $\beta(x)=0$, то в ограничении на L, $E(P)$ является полиномом, степень которого не больше, чем $\deg P-n$. Второе утверждение вытекает из того, что а) если L — лакуна, то $E|_L$ — полином; б) в нашем случае трубочное отображение инъективно (в частности, если $t\beta(x)=0$, то и $\beta(x)=0$), и в) для достаточно больших N классы всевозможных дифференциальных форм $\Lambda(x, \nu, P)$ с $|\nu|=N$ порождают всю группу когомологий $H^{n-1}(\mathbf{CP}_\xi^{n-1}-X^*-A^*)$, см. [40]. Случай неоднородного P сводится к однородному, см. [40, п. 4.5].

Сходными методами доказывается следующее уточнение п. B теоремы 1.2.

2.3. Теорема 2.2. (см. [40]). Если оператор P гиперболичен и множество A^* гладко, то любая точка волнового фронта $W(P)$ является особой точкой фундаментального решения $E(P)$. Для почти любого гиперболического оператора P с данной главной частью $\bar{P}$ носитель $E(P)$ совпадает с выпуклой оболочкой волнового фронта. Если $n=3$, то последнее верно для всех гиперболических операторов без исключения. (Например, волновой оператор при четном $n \geqslant 4$ не является «почти любым»).

§ 3. Локальный критерий Петровского

3.1. Одна и та же компонента дополнения к волновому фронту может быть локальной лакуной вблизи одних точек своей границы и носительницей диффузии — вблизи других. Вопрос о том, является ли компонента лакуной, эквивалентен вопросу о том, является ли она локальной лакуной вблизи начала координат. Для исследования резкости вблизи остальных точек фронта Атья, Ботт и Гординг ввели локальный аналог критерия Петровского (см. [40]). Опишем его.

Пусть $y \neq 0$ — точка фронта $W=W(P)$, l — компонента дополнения к W вблизи y, $Y^* \subset \mathbf{CP}_\xi^{n-1}$ — проективизация плоскости $Y \subset \mathbf{C}_\xi^n$, ортогональной к y. Если точка $x \in l$ достаточно близка к y, то проекция $Y \to X$ определяет гомоморфизм

$$p_x : H_{n-2}(Y^* - A^*) \to H_{n-2}(X^* - A^*).$$

Определение 3.1. *Локальным критерием Петровского* называется условие

$$\beta(x) \in p_x(H_{n-2}(Y^* - A^*)).$$

3.2. Теорема 3.1. (см. [40]). Если для точек локальной (вблизи y) компоненты l дополнения к фронту выполнен локальный критерий Петровского, то фундаментальное решение $E(P)$ голоморфно резко в точке y со стороны l.

Оказывается, теорема 3.1 почти всегда обратима:

3.3. Теорема 3.2 (см. [10]). 1. Если поверхность A^* вблизи множества $\mathbf{RP}_\xi^{n-1}$ касается плоскости Y^* лишь в конечном числе точек, то из голоморфной резкости $E(P)$ в точке y со стороны компоненты l следует локальный критерий Петровского для всех $x \in l$.

2. Для почти любого гиперболического оператора предположение п. 1 настоящей теоремы выполнено в любой точке $y \neq 0$ его фронта.

3.4. Контрпример. В самом общем случае теорема 3.1 не обратима. Действительно, пусть $P=\xi_1 \cdot (\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2)$. Фронт $W_\xi(P)$

состоит из кругового конуса и луча, натянутого на орт (1, 0, 0). Резкость вблизи этого луча вытекает из теоремы Гартогса об устранимой особенности, а локальное условие Петровского, как легко вычислить, не выполнено.

§ 4. Геометрия лакун вблизи конкретных особенностей фронтов

4.1. Локальный критерий Петровского, а следовательно, и резкость вблизи точек фронта определяются локальной геометрией фронта. Эта геометрия наиболее просто описывается в терминах (проективных) производящих функций, которые мы сейчас определим. Для простоты рассмотрим лишь случай, когда рассматриваемая точка $y\in W$ соответствует единственной точке a множества $\operatorname{Re} A^*$, то есть ортогональная ей плоскость Y касается поверхности $\operatorname{Re} A$ по единственной прямой. Выберем в $\mathbf{RP}_\xi^{n-1}$ аффинную систему координат $z_0, z_1, \ldots, z_{n-2}$ с центром в точке a, такую что плоскость Y^* задается уравнением $z_0=0$. Тогда поверхность A^* вблизи a задается условием $z_0=f(z_1, \ldots$ $\ldots, z_{n-2})$. Определенная таким образом функция f называется *проективной производящей функцией поверхности* A^* в точке a; очевидно, $f(0)=\operatorname{grad} f(0)=0$.

4.2. Исследование на резкость вблизи гладких точек фронта. В общей точке фронта особенность f является *морсовской*, то есть ее второй дифференциал — невырожденная квадратичная форма; ее индексы инерции обозначим через $i_\pm(a)$. В этом случае вблизи точки фронт является гладким многообразием и делит ее окрестность на две части. Одна из этих частей содержит такую точку x, что соответствующая плоскость X^* задается условием $z_0\equiv\varepsilon$, $\varepsilon>0$. Обозначим эту часть через l^+, а другую — через l^-.

Теорема 4.1 (см. [7], [24]). Пусть a — общая точка A^*. Тогда, если n и $i_\pm\equiv i_\pm(a)$ четны, то обе компоненты $l^\pm$ — локальные лакуны; если n четно, а $i_\pm$ — нет, то вблизи y нет лакун; если n нечетно, то локальной лакуной является только l^- при i_+ четном и только l^+ — при нечетном.

4.3. Исследование на резкость вблизи ребра возврата и ласточкина хвоста. В точках уплощения поверхности $\operatorname{Re} A^*$ (то есть в точках, где вырождается ее форма кривизны) производящая функция уже не будет морсовской, а будет иметь вырожденную особенность. Классификации таких особенностей посвящено много работ, см. например [3]. Вблизи простейших особенностей этой классификации — типов A_2 и A_3 — волновой фронт диффеоморфен произведению линейного пространства на полукубическую параболу, см. рис. 2а (соответственно, на *ласточкин хвост*, то есть поверхность изображенную на рис. 4; точкам типа A_2 на этом рисунке соответствуют ребра возврата). Условие резкости со стороны той или иной компоненты дополнения к фронту вновь зависит от четности n и индекса i_+ квад-

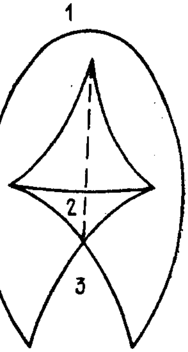


Рис. 4

ратичной части производящей функции; при этом, умножая если надо координату z_0 на —1, мы будем иметь дело лишь с модификацией A_3^+ особенности A_3 (см. таблицу 1 ниже).

Теорема 4.2. (см. [48]). Вблизи точек типа A_2 при нечетных n и четных i_+ имеется резкость со стороны компоненты 2, а при других n и i_+ резкости не бывает. Вблизи особенностей A_3 локальными лакунами являются только: область 3 при нечетном i_+ и любом n; область 2 при четном i_+ и нечетном n.

4.4. В случае более сложных особенностей аналогичное описание всех локальных лакун становится более громоздким, поэтому приведу лишь результаты о количестве этих лакун.

Теорема 4.3. Вблизи любой точки, в которой волновой фронт общего гиперболического оператора имеет особенность одного из типов[1)] A_k, D_k, E_k, X_9, X_{10}, J_{10}, число локальных лакун равно указанному в таблице 1 (или удовлетворяет приведенному там неравенству). На общих фронтах в $\mathbf{R}_x^n$ при $n \leqslant 7$ могут встречаться лишь особенности, принадлежащие одному из типов, указанных в таблице 1. (В этой таблице Q означает невырожденную квадратичную форму от дополнительных переменных $z_{r+1}, \ldots, z_n$, где r — это коранг особенности, то есть дефект формы кривизны поверхности A^*: он указан в третьей графе таблицы; i_+ — положительный индекс инерции формы Q. В графе "$n \geqslant$" указывается минимальное из таких n, что соответствующая особенность возникает на фронтах общего положения в $\mathbf{R}_x^n$).

Гипотеза. Во всех клетках этой таблицы, в которых стоит знак вопроса, должен стоять нуль.

Утверждение этой теоремы о A_1 доказано в [24], о A_2, A_3 — в [48], а A_k ($k \geqslant 4$), D_k, E_k — в [10]. Утверждения об остальных особенностях получены с помощью ЭВМ, этот же машинный

1) Обозначения взяты из классификационных таблиц [3].

Таблица 1

Тип особенности производящей функции	Нормальная форма, к которой производящая функция приводится диффеоморфизмом аргументов	корранг	$n \geqslant$	Число лакун			
				n четно		n нечет.	
				i_+ чет.	i_+ нечет.	i_+ нечет.	i_+ чет.
A_1	Q	0	2	2	0	1	1
A_{2k}, $k \geq 1$	$z_1^{2k+1} + Q$	1	$2k+1$	0	0	1	0
$A_{2k-1}^{\pm}$, $k \geq 2$	$\pm(z_1^{2k} + Q)$	1	$2k$	0	1	1	1
D_4^-	$z_1^2 z_2 - z_2^3 + Q$	2	5	0	3	1	1
D_{2k}^+, $k \geq 2$	$z_1^2 z_2 + z_2^{2k-1} + Q$	2	$2k+1$	0	0	1	1
D_{2k}^-, $k \geq 3$	$z_1^2 z_2 - z_2^{2k-1} + Q$	2	$2k+1$	0	2	1	1
$D_{2k+1}^{\pm}$, $k \geq 2$	$\pm(z_1^2 z_2 + z_2^{2k} + Q)$	2	$2k+2$	0	0	1	1
$E_6^{\pm}$	$\pm(z_1^3 + z_2^4 + Q)$	2	7	0	0	1	1
E_7	$z_1^3 + z_1 z_2^3 + Q$	2	8	0	0	1	1
E_8	$z_1^3 + z_2^5 + Q$	2	9	0	0	1	1
$X_9^{\pm}$	$\pm(z_1^4 + \alpha z_1^2 z_2^2 + z_2^4 + Q)$, $\alpha > -2$	2	9	≥ 1	0	≥ 2	≥ 0
X_9^1	$z_1 z_2 (z_1^2 + \alpha z_1 z_2 + z_2^2) + Q$, $\lvert\alpha\rvert < 2$	2	9	0	0	0	0
X_9^2	$z_1 z_2 (z_1 + z_2)(z_1 + \alpha z_2) + Q$, $\alpha \in (0,1)$	2	9	0	≥ 2	0	0
$X_{10}^{3\pm}$	$\pm(-z_1^4 + z_1^2 z_2^2 + \alpha z_2^5 + Q)$, $\alpha > 0$	2	10	0	?	?	0
$X_{10}^{1\pm}$	$\pm(z_1^4 + z_1^2 z_2^2 + \alpha z_2^5 + Q)$, $\alpha > 0$	2	10	?	0	?	0
J_{10}^3	$z_1 (z_1 - z_2^2)(z_1 - \alpha z_2^2) + Q$, $\alpha \in (0,1)$	2	10	?	≥ 1	0	0
J_{10}^1	$z_1 (z_1^2 + \alpha z_1 z_2^2 + z_2^4) + Q$, $\lvert\alpha\rvert < 2$	2	10	?	?	0	0

эксперимент является очень серьезным доводом в пользу последней гипотезы. Основное методологическое замечание при доказательстве этой теоремы (и теоремы 3.2) состоит в том, что задача о локальных лакунах является задачей локальной теории особенностей гладких функций; об этой теории см. [3].

§ 5. Уравнения с переменными коэффициентами

Все результаты предыдущих §§ 3, 4 имеют естественные обобщения на случай гиперболических операторов с переменными коэффициентами:

$$P = \Sigma P_\alpha(x)\,(\partial/\partial x)^\alpha, \quad P_\alpha \in C^\infty(\mathbf{R}^n_x),$$

(см. [48]). В частности, в этом случае также определено понятие резкости и локальное гомологическое условие Петровского. Не формулируя этих понятий, приведем лишь основной результат этой теории.

Теорема 5.1 (см. [9], [48]). *Вблизи точек волнового фронта строго гиперболического уравнения, соответствующих изолированным особенностям производящих функций, из локального критерия Петровского вытекает резкость фундаментального решения.*

Эта теорема была доказана в [48] в случае аналитических коэффициентов, а вблизи особенностей типов A_k — и в C^∞-случае. Там же был намечен подход к доказательству теоремы в приведенной общей формулировке, реализованный затем в [9].

ЛИТЕРАТУРА

Теория обобщенных функций достаточно полно изложена в книгах [13], [18], [19], [37], [65], [66], в которых имеется много полезных упражнений и поучительных примеров.

Книги [25], [45] и [68] посвящены широкому кругу вопросов, связанных с теорией и применениями преобразования Фурье, в частности с операционным исчислением.

Наиболее эффективные методы исследования общих уравнений с постоянными коэффициентами, предложенные в работах [4], [5], [30], [31], [42], [52] и [57], основаны на идеях алгебраической геометрии.

В работах [7], [47], [49], [51], [55], [56], [63] получена детальная информация о структуре, особенностях и асимптотике, а в [10], [16], [24], [40], [48], [61] — о лакунах фундаментальных решений гиперболических уравнений.

Работы [32], [33], [60] содержат основополагающие результаты по корректности задачи Коши для гиперболических уравнений, а [20] — по классам единственности и корректности задачи Коши для уравнений с постоянными коэффициентами. Исчерпывающую информацию по корректности краевых задач для параболических систем (и уравнений) читатель найдет в [39].

В [2] излагается теория краевых задач в соболевских пространствах функций для уравнений с переменными коэффициентами, почти столь же эффективная, как для уравнений с постоянными коэффициентами, а в [11] — для псевдодифференциальных уравнений.

Теория соболевских пространств и теоремы вложения излагаются в [15], [26], [29], [35] и [38].

В работах [8], [22] излагаются важные вопросы стационарной теории рассеяния, связанные с условием излучения Зоммерфельда, для общих уравнений, а в [36] — на простейшем конкретном примере.

В работе [28] найдены условия разрешимости уравнений в конусе (и, в частности, в угле).

С применением теоремы Зайденберга — Тарковского читатель может ознакомиться в [21], [37], [54], [55], [69].

В [6], [44], [62] можно найти применения уравнений с постоянными коэффициентами в математической физике.

В [41] и [71] имеется обширная информация о специальных функциях и их применениях к уравнениям в частных производных.

Теория аналитических функций многих комплексных переменных достаточно полно изложена в книгах [12], [50] и [53].

Работа [1] представляет собой обзор по теории уравнений с постоянными коэффициентами, а [69] — курс теории таких уравнений.

Наиболее полное изложение современного состояния теории уравнений с постоянными коэффициентами имеется в монографиях [30], [55]. В них излагаются такие важные вопросы, как аппроксимация решений, P-выпуклость и разрешимость уравнений в областях, теория рассеяния, метод ВКБ (переход волновой оптики в геометриечскую), системы уравнений и другие, не затронутые в данном обзоре из-за недостатка места.

В [26], [38], [55] подробно излагается современная теория линейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами.

Книги [14], [29], [34], [36] и [43], [54] — общие руководства по уравнениям в частных производных.

1. *Агранович М. С.*, Об уравнениях с частными производными с постоянными коэффициентами. Успехи мат. наук, 1961, *16*, № 2, 27—93
2. —, *Вишик М. И.*, Эллиптические краевые задачи с параметром и параболические задачи общего вида. Успехи мат. наук, 1964, *19*, № 3, 43—161
3. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.*, Особенности дифференцируемых отображений. 1, 2. М.: Наука, 1982, 304 с.; 1984, 336 с.
4. *Бернштейн И. Н.*, Модули над кольцами дифференциальных операторов. Исследование фундаментальных решений уравнений с постоянными коэффициентами. Функц. анализ и его прил., 1971, *5*, № 2, 1—16
5. —, *Гельфанд И. М.*, Мероморфность функции P^{λ}. Функц. анализ и его прил., 1969, *3*, № 1, 84—85
6. *Боголюбов Н. Н., Широков Д. В.*, Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976, 479 с.
7. *Боровиков В. А.*, Фундаментальные решения линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Тр. Моск. мат. об-ва, 1959, *8*, 199—257
8. *Вайнберг Б. Р.*, Принципы излучения, предельного поглощения и предельной амплитуды в общей теории уравнений с частными производными. Успехи мат. наук, 1966, *21*, № 3, 115—194
9. *Варченко А. Н.*, О нормальных формах негладкости решений гиперболических уравнений. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1986, *51*, № 1, 114—131
10. *Васильев В. А.*, Резкость и локальное условие Петровского для строго гиперболических операторов с постоянными коэффициентами. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1986, *50*, № 2, 242—283
11. *Вишик М. И., Эскин Г. И.*, Уравнения в свёртках в ограниченной области. Успехи мат. наук, 1965, *20*, № 3, 89—152
12. *Владимиров В. С.*, Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964, 411 с.
13. —, Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979, 318 с.
14. —, Уравнения математической физики. Изд. 4-е. М.: Наука, 1981, 512 с.
15. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.*, Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения. Успехи мат. наук, 1965, *20*, № 1, 3—74
16. *Габриэлов А. М.*, Доказательство теоремы И. Г. Петровского. Приложение к кн.: *Петровский И. Г.*, Избранные труды, 1. М.: Наука, 1986, 504 с.
17. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши. Успехи мат. наук, 1953, *8*, № 4, 3—51
18. —, —, Обобщенные функции. Вып. 1. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958, 440 с.
19. —, —, Обобщенные функции. Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций. М.: Физматгиз, 1958, 308 с.
20. —, —, Обобщенные функции. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958, 274 с.
21. *Горин Е. А.*, Асимптотические свойства многочленов. Успехи мат. наук, 1961, *16*, № 1, 91—118
22. *Грушин В. В.*, Об условиях типа Зоммерфельда для некоторого класса дифференциальных уравнений в частных производных. Мат. сб., 1963, *63*, № 2, 147—174

23. —, Распространение гладкости решений дифференциальных уравнений главного типа. Докл. АН СССР, 1963, *148*, № 6, 1241—1244
24. *Давыдова А.М.*, Достаточное условие отсутствия лакуны. М.: Изд-во МГУ, 1945, 43 с.
25. *Диткин В. А., Прудников А. П.*, Операционное исчисление. М.: Высшая школа, 1966, 404 с.
26. *Егоров Ю. В.*, Линейные дифференциальные уравнения главного типа. М.: Наука, 1984, 360 с.
27. *Лопатинский Я. Б.*, Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. Укр. мат. ж., 1953, *5*, № 2, 123—151
28. *Мерзон А. Е.*, О разрешимости дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в конусе. Докл. АН СССР, 1973, *211*, № 2, 285—288
29. *Михлин С. Г.*, Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977, 430 с.
30. *Паламодов В. П.*, О регуляризации и проблеме деления. Докл. АН СССР, 1960, *132*, № 2, 295—298
31. —, Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Наука, 1967, 500 с.
32. *Петровский И. Г.*, О задаче Коши в области неаналитических функций. Успехи мат. наук, 1937, № 3, 234—238
33. —, О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций. Бюлл. МГУ. Мат. и мех., 1948, *1*, № 7, 1—72
34. —, Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961, 400 с.
35. *Соболев С. Л.*, Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950, 256 с.
36. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.*, Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972, 735 с.
37. *Шилов Г. Е.*, Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965, 327 с.
38. *Шубин М. А.*, Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978, 279 с.
39. *Эйдельман С. Д.*, Параболические системы. М.: Наука, 1964, 443 с.
40. *Atiyah M. F., Bott R., Gårding L.*, Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients. 1, 2. Acta Math., 1970, *124*, 109—189; 1973, *131*, 145—206 (Пер. на рус. яз.: *Атья М. Ф., Ботт Р., Гординг Л.*, Лакуны для гиперболических дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. 1, 2. Успехи мат. наук, 1971, *26*, № 2, 25—100; 1984, *39*, № 3, 171—224)
41. *Bateman H., Erdelyi A.*, Higher trancedential functions. V. 2. New York, 1953 (Пер. на рус. яз.: *Бейтмен Г., Эрдейи А.*, Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1966, 295 с.)
42. *Bjork J. E.*, Rings of differential operators. North-Holland Publ. Co. Math. Library Series, 21, 1979
43. *Courant R.*, Partial differential equations. New York—London, 1962, 830 pp. (Пер. на рус. яз.: *Курант Р.*, Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964, 830 с.)
44. *Dirac P.*, The principles of quantum mechanics. Oxford, 1958. (Пер. на рус. яз.: *Дирак П.*, Принципы квантовой механики. М.: Физматгиз, 1960, 434 с.)
45. *Doetch G.*, A Leitung zum praktischen Gebrauch der Laplace — Transformation und z-Transformation. Munchen—Wien: R. Oldenburg, 1967 (Пер. на рус. яз.: *Дёч Г.*, Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. М.: Наука, 1971, 288 с.)
46. *Ehrenpreis L.*, Solutions of some problems of division, 1. Amer. J. Math., 1954, *76*, 883—903

47. *Gårding L.*, Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients. Acta Math., 1950, *85*, 1—62
48. —, Sharp fronts of paired oscillatory integrals. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., 1977, *12*, 53—68 (Пер. на рус. яз.: *Гординг Л.*, Резкие фронты парных осциллирующих интегралов. Успехи мат. наук, 1983, *38*, № 6, 85—96
49. —, *Kotake T.*, *Leray J.*, Uniformisation et development asimtotique de la solution du probleme de Cauchy lineaire. Bull. Soc. Math., France, 1964, *92*, 263—361 (Пер. на рус. яз.: *Лере Ж.*, *Гординг Л.*, *Котаке Е.*, Задача Коши. М.: Мир, 1967, 152 с.)
50. *Gunning R.*, *Rossi H.*, Analytic functions of several variables. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1965, 317 pp. (Пер. на рус. яз.: *Ганнинг Р.*, *Росси Х.*, Аналитические функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1969, 395 с.)
51. *Hadamard J.*, Le probleme de auchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques. Paris, 1932 (Пер. на рус. яз.: *Адамар Ж.*, Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978, 351 с.)
52. *Hörmander L.*, On the division of distributions by polinomials. Ark. Mat., 1958, *3*, 555—568
53. —, An introduction to complex analysis of several variables. 2 nd ed. Amsterdam-London: Noth. Holl. Publ. Co., 1973, 224 pp. (Пер. на рус. яз.: *Хёрмандер Л.*, Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968, 279 с.)
54. —, Linear partial differential operators. Berlin: Springer, 1963, 287 pp. (Пер. на рус. яз.: *Хёрмандер Л.*, Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965, 379 с.)
55. —, The analysis of linear partial differential operators. 1, 2, 3, 4. Berlin: Springer, 1983, 391 pp., 392 pp.; 1984, 340 pp.; 1985, 352 pp. (Пер. на рус. яз.: *Хёрмандер Л.*, Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. 1, 2, 3. М.: Мир, 1986, 462 с.; 463 с.; 1987, 694 с.)
56. *Leray J.*, Hyperbolic differential equations. The Institut for Advanced Study, Princeton, 1953, 240 pp. (Пер. на рус. яз.: *Лере Ж.*, Гиперболические дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984, 207 с.)
57. *Lojasiewicz S.*, Sur le probleme de division. Stud. Math., 1959, *18*, 87—136
58. *Malgrange B.*, Equations aux derivees partielles a coefficients constant. 1. Solution elementaire. C. r. Acad. sci., 1953, *237*, n° 25, 1620—1622
59. *Nuij W.*, Anote on hyperbolic polinomials. Math. Scand., 1968, *23*, n° 1, 69—72
60. *Petrowsky I. G.*, Uber das Cauchysche Problem fur Systeme von Differentialgleichungen. Мат. сб., 1937, *2*, n° 5, 815—870 (Пер. на рус. яз.: в кн. *Петровский И. Г.*, Избранные труды. 1. М.: Наука, 1986, 504 с.)
61. —, On the diffusion of waves and the lacunas for hyperbolic equations. Мат. сб., 1945, *17*, n° 2, 289—370 (Пер. на рус. яз.: в кн. *Петровский И. Г.*, Избранные труды. 1. М.: Наука, 1986, 504 с.)
62. *Reed M.*, *Simon B.*, Methods of modern mathematical physics. 2, 3. New York: Acad. Press, 1975, 390 pp., 1979, 440 pp. (Пер. на рус. яз.: *Рид М.*, *Саймон Б.*, Методы современной математической физики. 2, 3. М.: Мир, 1978, 395 с.; 1982, 443 с.)
63. *Riesz M.*, L'integral de Riemann-Liouville et le probleme de Cauchy. Acta Math., 1949, *81*, 1—223
64. *Rudin W.*, Principles of mathematical analisis. New York: McGraw-Hill, 1964, 280 pp. (Пер. на рус. яз.: *Рудин У.*, Основы математического анализа. М.: Мир, 1976, 319 с.)
65. *Schwartz L.*, Theorie des distributions. Paris: Hermann, 1966, 420 p.
66. —, Methodes mathematiques pour les science physiques. Paris: Hermann, 1965, 400 p. (Пер. на рус. яз.: *Шварц Л.*, Математические методы для физических наук. М.: Мир, 1965, 412 с.)
67. *Sobolev S. L.*, Methode nouvelle a resoudre le probleme de Cauchy pour les equations lineaires hyperboliques. Мат. сб., 1936, *1*, № 1, 39—71

68. *Titchmarsh E.,* Introduction to the theory of Fourier integrals. Oxford: clanderon Press, 1937, 390 pp. (Пер. на рус. яз.: *Титчмарш Э.,* Введение в теорию интегралов Фурье. М.: ИЛ, 1948, 400 с.)
69. *Treves F.,* Lectures on linear partial differential equations with constant coefficients. Rio de Janeiro, 1961, 290 pp. (Пер. на рус. яз.: *Трев Ж.,* Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами. М.: Мир, 1965, 296 с.)
70. *Weyl H.,* The method of ortogonal projection in potential theory. Duke Math. J., 1940, *7,* 411—444
71. *Whittaker E. T., Watson G. N.,* A cours of modern analysis. Cambridge: Univ. Press, 1927, 608 pp. (Пер. на рус. яз.: *Уитеккер Э. Т., Ватсон Дж. Н.,* Курс современного анализа. 1, 2. М.: Физматгиз, 1963, 344 с.; 516 с.)
72. *Yosida K.,* Fuctional analysis. Berlin: Springer, 1966, 458 pp. (Пер. на рус. яз.: *Иосида К.,* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967, 624 с.)

УДК 517.951+517.956

Ю. В. Егоров, М. А. Шубин, Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Элементы современной теории. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 31. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1988, 5—125

Излагаются методы теории линейных дифференциальных уравнений с частными производными, основанные на применении микролокального анализа: псевдодифференциальные операторы, интегральные операторы Фурье, теория волновых фронтов обобщенных функций. Описаны современные методы изучения операторов главного типа и смешанной задачи для гиперболических уравнений. Изложены основы теории метода стационарной фазы и канонического оператора Маслова. Дан обзор основных результатов спектральной теории линейных самосопряженных дифференциальных операторов с частными производными. Библ. 105 назв.

УДК 517.951+517.956

А. И. Комеч, Линейные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 31 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)», М., 1988, 127—261

Изложены основные результаты, методы и понятия теории линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Изложение основано на теории обобщенных функций. Наряду с перечислением последних достижений теории большое внимание уделяется конкретным примерам и приложениям, разъяснению основных понятий теории: характеристик, бихарактеристик, лучей, волнового фронта. Указан новый подход к выводу классических формул для фундаментальных решений, основанный на обобщении методов Адамара, Лере, и М. Рисса. Изложена теория краевых задач в полупространстве для общих уравнений и их классификация. Изложение сопровождается многочисленными важными для приложений примерами. Дано описание современного состояния теории лакун. Библ. 72.

Технический редактор *З. А. Прусакова*

Сдано в набор 27.11.87 Подписано в печать 24.05.88
Формат бумаги 60×90$^1/_{16}$. Бум. тип. № 2 Литературная гарнитура.
Высокая печать. Усл. печ. л. 16,75 Усл. кр.-отт. 16,75 Уч.-изд. л. 14,86
Тираж 1700 экз. Заказ 10120 Цена 2 р. 70 к.

Адрес редакции: 125219, Москва, Балтийская ул., 14. Телефон 155-43-29

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
140010, Люберцы, 10, Московской обл., Октябрьский просп., 403

ISSN 0233—6723. ИНТ, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 31, 1988, 1—268